ESSAI D'UNE PRÉSENTATION DE LA LOGIQUE COMBINATOIRE

J. DOPP

Dès 1944, M. Feys, dans son traité en langue néerlandaise, *Logistiek* I (1), attirait l'attention des logiciens sur l'importance et la nouveauté de la Logique combinatoire. En 1946, il consacrait à cette discipline encore jeune un important article, *La technique de la logique combinatoire* (2), par lequel il initiait ses lecteurs à la technique propre à cette science. Dans cette étude, après avoir signalé l'extrême généralité des problèmes que cette discipline aborde et le caractère à la fois remarquablement neuf et exigeant des méthodes qu'elle met en œuvre, l'auteur avouait sans ambages qu'«aucune partie de la logique formalisée ne présente un premier abord aussi insolite et aussi rebutant».

Nous nous proposons de faire ici un essai de «présentation» de cette discipline, au sens tout à fait familier où l'on a coutume de «présenter» une personne à une assemblée.

La chose a déjà été faite, et de façon magistrale, par le créateur même de la Logique combinatoire, H. B. Curry, qui a publié en 1951 dans une revue italienne, que peu de nos lecteurs auront eu l'occasion de consulter, deux conférences en langue française destinées à un auditoire de philosophes (3).

L'important traité *Combinatory Logic,* dont le premier volume a paru en 1958 sous la signature de H. B. Curry et R. Feys (4), débute par une remarquable présentation de la logique combinatoire; il contient au surplus tous les renseignements désirables sur l'histoire de cette discipline.

Le présent essai voudrait persuader ses lecteurs d'aborder l'étude

(1) Antwerpen, Standaard-Boekhandel, 1944, aux pp. 74-84.

(2) In *Revue philosophique de Louvain,* 1946, aux pp. 74-103 et 237-270.

(3) *La Théorie des combinateurs,* in *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni,* ser. V, vol. X, fasc. 3-4, Roma, 1951, pp. 347-359, et *La logique combinatoire et les antinomies, ibid.,* pp. 360-370. Signalons aussi le précieux article de Curry, *The Combinatory Foundations of Mathematical Logic* (in *Journal of Symbolic Logic,* 1942, pp. 49-64), où l'auteur esquissait l'état de ses recherches en janvier 1941 devant l'*Association for Symbolic Logic.*

(4) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, XVI-417 p.

de cet ouvrage, en leur faisant entrevoir les raisons d'être de cette belle et laborieuse recherche ([5]).

L'espoir qui guida la réflexion de Curry, dès ses premiers travaux de 1929 et 1930, ne fut pas de trouver la justification de nouveaux types de raisonnements plus complexes que ceux dont s'occupaient les logiciens du temps, mais plutôt de purifier les instruments de la recherche logique, de clarifier ce que Curry appelle la «prélogique». Curry estimait que les logiciens, pour autant qu'ils se soient souciés de décrire les instruments qu'ils s'accordent pour leur recherche, avaient négligé d'analyser certaines démarches couramment utilisées et qui sont en réalité plus complexes qu'il ne paraît à première vue. Si donc l'on veut fonder de manière vraiment critique le travail logique, il faut procéder à une analyse plus exigeante. En particulier, les logiciens se servent couramment de symboles qu'ils traitent comme des «variables» et sur lesquels ils procèdent à des substitutions. Le mécanisme même de la substitution à une variable parut à Curry déjà trop complexe pour qu'on puisse se dispenser d'en faire une analyse très attentive. Il entrevit la nécessité, et la possibilité, d'élaborer une logique qui se passe complètement de ce procédé commode.

Par ailleurs, comme tous les logiciens, Curry était préoccupé de découvrir la racine véritable des célèbres antinomies qui surgissent dans le développement de systèmes logiques de la plus saine apparence. Il s'aperçut que des antinomies pouvaient se produire (sous forme d'inconsistance) dans des systèmes qui ne connaissent pas l'opération de négation. Il s'agissait donc de construire une logique où les antinomies connues ne se verraient pas écartées par des restrictions conçues dans ce seul but particulier, où elles pussent être soumises formellement à l'examen du logicien et où leurs racines les plus profondes pussent être mises à jour.

On voit que c'est essentiellement un souci de critique qui dicta toute la recherche de la logique combinatoire. Il s'agit avant tout d'asseoir la logique sur des fondements plus simples encore et donc moins chargés de présupposés philosophiques (aussi bien empiricistes que conceptualistes ou métaphysiques). En particulier le point de vue dit «syntaxiste» parut à Curry une sorte de préjugé de nature philosophique.

([5]) Il est sans doute superflu de dire que notre présentation se voit contrainte de simplifier considérablement les questions et de négliger certaines distinctions, cependant capitales dans la théorie. Le présent essai est tenté sous la seule responsabilité de son auteur.

Disons d'abord quelques mots des problèmes que soulève l'emploi des «variables».
Curry distingue d'abord deux acceptions principales du mot de «variables».

Dans une première acception (Curry parle alors de *«variables intuitives»*), les variables sont des symboles (ou des expressions symboliques) utilisés d'une certaine manière, dans un langage utilisé lui-même en tenant compte de la signification de ses symboles (Curry parle alors d'un «*U-language*», ou langage utilisé). Une «variable» de ce langage sert à représenter une entité qui doit pouvoir être quelconque, à choisir arbitrairement dans une certaine espèce ou classe d'entités, classe caractérisée par certaines propriétés communes à ses membres. La connaissance intuitive de ces propriétés est présupposée pour l'emploi de ces variables.
Dans le langage familier, on emploie à cet effet des locutions formées par un nom commun précédé d'un article indéfini (p. ex. «une entité», «un objet», «un homme», «un prédicat», «une proposition», etc.). L'emploi d'une variable intuitive permet d'abréger le discours et aussi de marquer que deux occurrences d'une semblable locution sont utilisées pour désigner une même entité. Plutôt que de dire d'abord «une certaine entité», et ensuite «la même entité que nous venons de désigner par la précédente occurrence de la locution 'une certaine entité'», il suffit d'employer à plusieurs reprises une même variable intuitive. L'emploi de plusieurs variables intuitives distinctes permet de parler d'entités dont il n'est pas postulé qu'elles doivent être identiques l'une à l'autre.
Sans de pareilles locutions ou sans variables intuitives, il est évidemment impossible de formuler aucune règle générale, aucune règle de méthode en particulier. Il est donc impossible de décrire ou de prescrire aucune démarche scientifique ou de formuler les conventions qui vont constituer un système formel. La logique combinatoire n'a donc pas l'ambition de dispenser de l'usage des variables intuitives. Elle les emploie d'abord pour formuler les conventions fondamentales qui constitueront le système de logique qu'elle propose (règles morphologiques et règles de la théorie proprement dite). Elle les emploie encore pour formuler les énoncés (Curry les appelle les «épithéorèmes») qu'elle veut établir concernant la théorie logique elle-même que les conventions dont nous venons de parler ont déterminée.

Mais une théorie formalisée consiste à son tour en un ensemble de thèses ou d'assertions (axiomes et théorèmes), que les conventions fondamentales dont nous venons de parler doivent caractériser d'une manière entièrement objective (normalement d'une manière récursive) comme étant valables dans la théorie en question.

Ces thèses sont d'ordinaire formulées elles-mêmes à l'aide de symboles, dont les règles d'emploi ont été objectivement précisées par des conventions, et qui forment ce que Curry appelle le «*langage-A*». Dans tous les langages-A utilisés avant la logique combinatoire figurent certains symboles considérés comme des «variables».

Ne doit-on pas se demander ce que représentent ces «variables» du langage-A ?

Sous l'influence principalement de Hilbert, on dit assez généralement que ces variables (comme d'ailleurs tous les symboles qui servent à exprimer les thèses élémentaires d'une théorie formalisée) n'ont pas à recevoir, à proprement parler, de signification. Le système est lui-même présenté d'un point de vue simplement «syntaxique». Les conventions du système concernent des symboles et ne tiennent compte que de leur physionomie typographique. Elles ne font aucune allusion à leur signification. Le système concerne donc un certain langage appelé le «*langage-objet*».

Cette manière de comprendre une théorie formalisée offre de réels avantages, qui ont été maintes fois soulignés, mais elle ne s'impose pas. En un certain sens, dans cette conception, les symboles dont on se sert pour formuler une thèse (élémentaire) de la théorie, reçoivent bien une signification, et cette signification s'identifie avec ces symboles eux-mêmes. Ces symboles concernent donc des entités dont la nature est bien connue: ces entités sont ces expressions, ces symboles eux-mêmes. N'est-ce pas là une sorte de préjugé philosophique, qui fait obstacle à l'exigence essentielle de la formalisation ? Un «*système formel*», au sens où Curry emploie cette expression, doit concerner des entités à propos desquelles on ne présuppose rien sinon ce qui leur sera explicitement attribué par les thèses (axiomes et théorèmes) de la théorie. On ne peut donc pas postuler que ces entités s'identifient avec les symboles de la théorie (ni de quelque langue-objet).

Mais si les symboles utilisés pour formuler les thèses d'une logique formalisée ne peuvent pas être identifiés simplement aux entités qu'ils représentent, quelles sont les entités que sont censées représenter leurs «variables» ? Ce sont ces entités que Curry appelle des «*variables formelles*». Il se demande si une théorie formelle doit nécessairement concerner de pareilles entités, et, par conséquent, si les thèses de la théorie doivent être formulées en employant des symboles spéciaux réservés à la représentation de pareilles entités indéterminées.

On notera donc que, tandis que d'ordinaire on appelle «variables» des symboles d'une certaine espèce (les règles qui gouvernent leur usage ont toujours quelque relation avec une certaine opération de substitution), Curry appelle «variables formelles», non pas des symboles, mais bien certaines entités que seraient censées concerner certaines thèses de la théorie et qui auraient à être représentées par certains symboles spéciaux. (Ces entités peuvent se trouver être à leur tour des symboles d'une langue-objet, mais ceci ne peut pas être un postulat de la théorie formelle. En tout cas on ne peut pas postuler que ces entités s'identifient à des symboles de la langue utilisée pour formuler les thèses élémentaires de la théorie).

Remarquons d'abord que, dans une présentation strictement «syntaxique» d'une théorie, une «variable» n'est pas un symbole qui représente une chose variable, ni même ici une chose indéterminée. C'est un symbole qui se représente soi-même; et il est donc une chose aussi parfaitement déterminée que tout autre symbole (il est déterminé au moins quant à sa physionomie typographique). En ceci rien ne le distingue des autres symboles, considérés comme des «constantes». Ce qui peut l'en distinguer devra être, soit sa relation à son éventuelle dénotation (à l'entité qu'il sert à représenter), soit au moins la règle qui gouverne son emploi (p. ex. l'existence d'une règle de substitution qui le concerne).

Au problème que nous avons formulé plus haut, Curry répond qu'il n'est pas nécessaire que les thèses d'un système de logique formalisée concernent des entités «indéterminées» (au sens où restent «indéterminées» les entités que représentent les variables intuitives). Précisément la logique combinatoire a l'ambition, au moins en principe, de formuler l'ensemble de ses thèses sans employer aucun symbole représentant une pareille «variable formelle».

Les thèses qui se formulent d'ordinaire à l'aide de «variables» ne sont pas proprement des assertions qui concernent des entités indéterminées qui seraient des «variables formelles». Ce sont des assertions qui concernent certaines fonctions, lesquelles doivent pouvoir recevoir pour arguments des entités choisies arbitrairement dans un certain domaine.

On sait que Church, utilisant les «foncteurs-lambda», a mis au point une manière de représenter les fonctions en elles-mêmes, les distinguant netttement des valeurs éventuellement indéterminées que ces fonctions prennent pour des arguments indéterminés. Mais la notation avec foncteurs-lambda utilise des symboles dont la dénotation est précisément la «variable formelle» qui devrait tenir lieu d'argument indéterminé à la fonction. La logique combinatoire, elle, est obligée de définir les fonctions sans faire aucune allusion à leurs arguments indéterminés; elle doit disposer d'une manière de les représenter où il n'est pas fait usage de symboles pour représenter les arguments indéterminés. C'est ce qu'elle fait à l'aide de combinateurs, qui sont des entités entièrement déterminées et se représentent par de vraies constantes.

A quoi servent, en effet, les «variables» pour arguments (indéterminés) dans la manière habituelle dont on représente les valeurs (indéterminées) des fonctions ?

Si la fonction est tout-à-fait élémentaire (ou inanalysée) et ne doit recevoir qu'un seul argument, il n'est pas nécessaire d'employer une variable. Cela ne devient nécessaire que si on veut parler à plusieurs reprises de la valeur que cette fonction prend pour un même argument. Mais alors la fonction entre dans un contexte plus complexe, lequel peut être considéré comme parlant d'une fonction analysée — avec cette particularité que la même fonction y intervient plusieurs fois, ainsi que le même argument. En ce qui concerne cet argument, il suffit donc d'avoir un moyen de marquer que l'emploi de l'argument doit être «réitéré» pour que soit déterminée la valeur de la fonction complexe. Nous verrons bientôt que ceci peut se faire à l'aide d'un certain combinateur (un «duplicateur»).

Considérons le cas d'une fonction, encore élémentaire, mais devant recevoir plusieurs arguments, dont certains peuvent d'ailleurs devoir être identiques entre eux. Ici l'emploi des variables sert à déterminer le nombre des arguments qui peuvent être distincts et l'ordre dans lequel ces arguments doivent être utilisés (cet ordre pouvant comporter des répétitions). Il suffira donc de disposer de combinateurs modifiant l'ordre dans lequel des arguments se trouvent donnés («permutateurs»).

Semblablement si la fonction est complexe, c'est-à-dire doit être construite en utilisant d'autres fonctions moins complexes supposées données, ou doit recevoir éventuellement pour arguments des valeurs que ces fonctions données prendraient pour certains arguments, dans tous ces cas, l'emploi des variables sert à préciser dans quel ordre ces divers arguments indéterminés doivent contribuer à déterminer la valeur, soit directement de la fonction complexe, soit d'un de ses arguments, compte tenant, le cas échéant, de certaines répétitions.

On entrevoit que tout ceci peut s'exprimer en parlant simplement de certains combinateurs, sans jamais parler des arguments indéterminés.

Qu'est-ce qu'un *combinateur* ?

Sommairement, c'est un opérateur qui transforme une certaine série d'entités distinctes (appelons-la «la série primitive») en une autre série d'entités (appelons-la «la série résultante») formée à partir des premières — ou de certaines d'entre elles seulement — en les prenant dans un ordre peut-être différent et qui admet des répétitions, — et éventuellement de nouvelles entités formées elles-mêmes en combinant entre elles, deux à deux, selon un certain ordre, des entités de la série primitive ou des entités elles-mêmes construites de la sorte, ces combinaisons pouvant se compliquer indéfiniment, mais en restant toujours dans l'ordre du fini.

Dans le présent contexte, prenons comme série primitive une série formée de tous les éléments distincts qui ont à intervenir dans la détermination de la valeur de la fonction en cause. Plaçons d'abord en tête tous les termes qui ont une valeur fixe et donnée (les fonctions élémentaires données et les arguments à valeurs déterminées données), puis les divers arguments indéterminés. (Il est commode de placer ces éléments indéterminés à la suite des autres, comme nous le verrons bientôt). L'ordre dans lequel nous rangeons ces entités dans la série primitive peut être arbitraire; les combinateurs auront à le modifier suivant les besoins. Pour déterminer maintenant la valeur indéterminée que la fonction étudiée prendra pour les arguments indéterminés présents dans la série primitive, il suffira de choisir le combinateur qui prescrira les opérations nécessaires à cet effet.

On entrevoit (mais bien entendu ceci doit faire l'objet d'une démonstration formelle et rigoureuse) que ces opérations peuvent se ramener à un petit nombre d'opérations élémentaires. Ces opérations plus élémentaires peuvent être réduites aux cinq suivantes:

1° Eliminer celles des entités de la série primitive qui n'auront pas à intervenir pour former les entités de la série résultante («*cancellateurs*»).

2° Reproduire celles des entités de la série primitive qui ont à intervenir («*identificateurs*»).

3° Opérer les répétitions de celles qui auront à intervenir à plusieurs reprises («*duplicateurs*»).

4° Permuter entre elles celles des entités qui ont à intervenir avant d'autres qui les précéderaient dans la série primitive («*permutateurs*»).

5° Combiner entre elles deux des entités déjà obtenues et qui auraient à former ensemble une des entités de la série résultante (ou qui auraient à intervenir comme composants d'une de ces entités (*«compositeurs»*).

Bien entendu ces diverses opérations élémentaires devront s'enchaîner dans un certain ordre, qui ne sera pas nécessairement celui que nous venons de dire; et elles pourront devoir être réitérées elles-mêmes dans un ordre donné selon des combinaisons indéfiniment variées.

Lorsque la série primitive des entités est tout entière formée d'entités indéterminées (de variables formelles), comme ces entités sont ici toutes distinctes les unes des autres, et donc que le nom qu'on peut leur donner n'a aucune importance, il devient inutile d'énoncer cette série primitive, et la fonction, quelque complexe qu'on la veuille, pourra être représentée sans aucun symbole pour «variables formelles».

Par ailleurs, il ne sera plus nécessaire non plus d'indiquer le nombre des arguments distincts qui auront à intervenir pour déterminer la valeur que pourra prendre la fonction, c'est-à-dire le nombre des termes de la série primitive. Ce nombre peut-être laissé indéterminé. Il suffit que le système formel permette toujours d'appliquer toute entité à toute autre, pour former une nouvelle entité. Le nombre des applications successives est illimité. Simplement, si on devait appliquer successivement à plus de n entités une entité destinée à être interprétée (dans une certaine langue-objet) comme une fonction pour n arguments seulement, on obtiendrait une nouvelle entité qui ne sera peut-être plus interprétable dans cette langue-objet; mais le système formel n'aurait pas moins à en étudier les propriétés formelles. Le système concerne en effet des entités qui ne sont pas nécessairement «interprétables». C'est précisément un des mérites d'un système formel de n'être pas lié à une interprétation déterminée, mais de permettre une multitude indéfinie d'interprétations différentes, dont certaines peuvent n'avoir pas encore été découvertes.

Nous avons dit que certaines entités de la série primitive peuvent être elles-mêmes des fonctions données. On pourra se demander si ces fonctions ont à intervenir autrement que pour leurs propriétés combinatoires, et si par conséquent, elles ne peuvent pas être elles-mêmes représentées par des combinateurs. Un des objectifs de la logique combinatoire sera de voir quelles sont les constantes logiques habituelles qui peuvent se réduire à des combinateurs (plus ou moins complexes). Mais c'est là une recherche longue et laborieuse, que nous ne pouvons pas même esquisser ici.

Mais, dès que l'on s'interdit de parler de «variables formelles» et d'employer des symboles spéciaux pour les représenter, on se prive de certaines facilités que procurait l'emploi courant des «variables». Dans une logique présentée d'un point de vue simplement syntaxiste, on peut par exemple parler du résultat obtenu après substitution, dans une expression donnée, d'une certaine expression à une «variable» donnée. Il n'est pas nécessaire d'entrer à ce propos dans des explications compliquées. Le résultat de cette substitution se constate aisément après qu'on aura effectivement pratiqué l'opération de substitution sur l'expression symbolique en question. On peut alors facilement constater, par exemple, que le résultat obtenu après deux substitutions opérées sur des variables distinctes est indépendant de l'ordre dans lequel ces substitutions ont été opérées (moyenant certaines précautions dans la formulation des règles de substitution). Ceci résulte de constatations, fort simples, effectuées sur les expressions symboliques de la langue-objet. Mais, de la sorte aussi, on s'accorde de pouvoir tirer parti, dans une théorie formelle, de certaines propriétés d'ordre réalisées entre les symboles dans une expression, laquelle est un objet physique. La logique est de la sorte subordonnée à certaines constatations (sans doute fort élémentaires) de l'expérience physique. Le souci de la logique combinatoire sera, entre autres, de dégager la logique formelle de cette dépendance à l'égard de l'expérience physique. En revanche, elle devra démontrer de manière formelle certaines équivalences qui étaient aisément contrôlables dans le point de vue simplement syntaxiste.

Outre le procédé de la «substitution» à une variable, les systèmes habituels de logique pratiquent aussi divers «*remplacements*» (en vertu de définitions, d'équivalences démontrées, etc.). Il s'agit cette fois, non de substituer, dans une expression donnée, à toutes les occurrences d'une variable, une autre expression donnée (dont la nature syntaxique doit répondre à certaines conditions), mais bien de remplacer, dans une expression donnée, une certaine partie de cette expression (partie qui peut être formée de plusieurs symboles) par une autre expression donnée (sous des conditions exprimées par une définition, un théorème d'équivalence ou quelque autre théorème reliant ces deux expressions), et ce remplacement se fait sur une partie seulement de l'expression primitive sans avoir à considérer le reste de cette expression (en particulier sans s'occuper de toutes les occurrences des divers symboles qui forment la partie de l'expression qui est remplacée). Cette fois encore, lorsque le système est présenté d'un point de vue syntaxiste, les règles de remplacement sont faciles à formuler et le résultat d'un remplacement se détermine à l'inspection de l'expression qui en résulte. Mais à nouveau, cette conception met la logique dans la dépendance de certaines constatations physiques. Si l'on veut affranchir la logique de cette dépendance, on doit reprendre à nouveaux frais toute cette pratique. Il faut définir, sans faire allusion aux symboles, les notions d'«entités» que peut concerner la théorie (Curry appelle ces entités des «*obs*», et il pose au départ certains «obs primitifs», à propos desquels il n'est rien postulé de particulier ([6])). Il faut définir de quelle manière on peut construire à l'aide d'obs primitifs (ou déjà construits) des «*obs construits*» ou plus complexes. Il faut définir ce qu'est un ob «*composant*» d'un autre et ce que sont les diverses «*occurrences*» de cet composant dans l'ob complexe.

Il faut définir à nouveau frais les diverses relations que le système pourra envisager entre ces obs; en particulier les relations fondamentales de «*réductibilité*», d'«*expansibilité*» et de «*convertibilité*» (disjonction ou union des deux précédentes). Il faut étudier les propriétés de la relation de «quasi-ordre» et de la relation d'«équivalence» «*engendrées*» par les précédentes, en fixer les propriétés formelles et très spécialement la propriété de «*monotonie*» par rapport aux diverses opérations admises dans la théorie pour la formation des obs complexes. Enfin, il faut démontrer d'une manière strictement formelle, que ces notions ont bien les propriétés qu'on souhaite. Tout ceci forme un ensemble d'analyses et de démonstrations extrêmement neuves et passablement difficiles, dont les logiques habituelles s'étaient dispensées.

La logique combinatoire comprend essentiellement deux grandes parties; la première est dite la «*théorie des combinateurs*», la seconde la «*logique combinatoire illative*».

Chacune concerne les entités (les «*obs*») obtenus de la manière suivante: Des conventions fondamentales déterminent quels sont les «*obs primitifs*» et leur attribuent leurs propriétés formelles. Il est convenu ensuite que si X et Y sont deux obs primitifs ou déjà construits), (XY) ou plus simplement XY est un nouvel ob, construit par «*application*» de l'ob X à l'ob Y. La théorie ne connaît pas d'autres obs que ceux formés de la sorte.

Nous rappelons que la théorie ne présuppose absolument rien concernant l'interprétation que l'on pourra donner à ces obs, tant primitifs que construits. Leur interprétation est laissée systématiquement ambiguë. Seules les conventions théoriques viendront limiter le choix pour cette interprétation.

([6]) Les conventions théoriques qui constituent le système formel (règles théoriques et axiomes) mettront ces divers obs en relation les uns avec les autres et ainsi leur attribueront certaines propriétés formelles qui pourront les différencier.

*
**

Dans la *théorie pure des combinateurs,* tous les obs primitifs seront à interpréter comme des combinateurs. (Ceci n'est pas une présupposition de la théorie; cela résultera de la nature des propriétés formelles qui seront attribuées à ces obs primitifs par les conventions de la théorie).

Subsidairement, cependant, on envisage aussi des *extensions* de la théorie par adjonction de nouveaux obs (non construits), pour lesquels les conventions de la théorie ne disent rien sinon que ce sont des obs (donc sans ajouter de règles ni d'axiomes propres à ces obs qui les distingueraient des autres). Les symboles qui représentent ces obs «*indéterminés*» peuvent alors être traités comme des variables intuitives; on pourra leur substituer n'importe quel symbole d'ob de la théorie. (Ceci à nouveau n'est pas une convention de la théorie, mais cela doit se démontrer dans un épithéorème).

La notation pour obs construits est simplement «*applicative*»; les symboles sont censés se grouper toujours par deux, en commençant par les deux premiers de gauche, pour grouper ensuite avec le suivant le groupe précédemment formé. Ainsi l'ob XY est l'ob (XY); l'ob XYZ est l'ob $((XY)Z)$; l'ob $XYZV$ est l'ob $(((XY)Z)V)$, et ainsi de suite. Si les symboles doivent être groupés dans un autre ordre, des parenthèses explicites doivent le marquer. Ainsi l'ob $X(YZ)$ n'est pas le même que l'ob XYZ.

Si X est un ob qui est un combinateur, l'ob XY peut être interprété comme l'ob qui résulte de l'opération prescrite par le combinateur X sur une série primitive d'obs dont le premier membre est l'ob Y; l'ob XYZ, comme l'ob qui résulte de l'opération X sur une série primitive dont le premier membre est l'ob Y et le second l'ob Z.

Si X et Y sont des combinateurs, l'ob $X(YZ)$ peut être interprété comme l'ob qui résulte de l'opération prescrite par X sur une série primitive dont le premier membre est l'ob YZ, lequel est lui-même l'ob qui résulte de l'opération Y pratiquée sur une série primitive dont le premier membre est l'ob Z.

Dans une première formulation, dite «*théorie intuitive des combinateurs*», les combinateurs fondamentaux sont introduits par des *règles de réduction,* où apparaissent, avec le symbole du combinateur à définir, des variables intuitives pour obs quelconques, «X», «Y», «Z», ...

L'*identificateur élémentaire*, **I**, est introduit par la règle:
Pour tout ob X, l'ob **I**X est réductible à l'ob X.

Le *cancellateur élémentaire*, **K**, par la règle:
Pour tous obs X et Y, l'ob **K**XY est réductible à l'ob X. (On voit que l'ob **K** est le combinateur qui prescrit de supprimer le second ob d'une série primitive; les obs suivants, s'il y en a, avancent d'un rang dans la série résultante).

Le *permutateur élémentaire*, **C**, par la règle:
Pour tous obs X, Y et Z, l'ob **C**XYZ est réductible à l'ob XZY. (On voit que **C** est le combinateur qui prescrit de permuter entre eux les 2e et 3e membres de la série primitive).

Le *duplicateur élémentaire*, **W**, par la règle:
Pour tous obs X et Y, l'ob **W**XY est réductible à l'ob XYY. (On voit que l'ob **W** est le combinateur qui prescrit de redoubler le 2e membre de la série primitive, lequel prend ainsi rang et de 2e et de 3e membre dans la série résultante; les membres qui le suivaient éventuellement dans la série primitive reculent donc d'un rang dans la série résultante).

Le *compositeur élémentaire*, **B**, par la règle:
Pour tous obs X, Y et Z, l'ob **B**XYZ est réductible à l'ob X(YZ). (L'ob **B** est donc le combinateur qui prescrit de prendre comme 2e membre de la série résultante un ob construit en appliquant le 2e au 3e membre de la série primitive; les obs suivants, s'il y en a, avancent donc d'un rang dans la série résultante).

On démontre que toutes les fonctions peuvent être construites si l'on dispose des combinateurs que nous venons de caractériser (et des fonctions élémentaires qui entrent dans l'analyse de la fonction complexe).

On étudie ensuite les propriétés formelles de la relation de *réductibilité*, de sa converse, la relation d'*expansibilité*, et de la réunion (ou disjonction) de ces deux relations, la *convertibilité*. On montre que cette dernière a les propriétés formelles d'une sorte d'égalité pour les combinateurs. On représente cette convertibilité par le prédicat (binaire infixe) «=», qui peut former avec deux obs une *assertion* de la théorie.

Par ailleurs, si au lieu des combinateurs **I**, **C**, **W** et **B**, on introduit le combinateur **S**, caractérisé par la règle suivante:
Pour tous obs X, Y et Z, l'ob **S**XYZ est réductible à l'ob XZ(YZ), on obtient un autre système, qui n'a que deux obs fondamentaux, **K** et **S**, et dans lequel on peut définir tous les autres combinateurs par des définitions explicites. Ainsi **I** se définit comme **SKK**, **C** com-

me **S(S(KS)K(S(KS)K)S)(KK)**, **W** comme **SS(K(SKK))** et **B** comme **S(KS)K**.
On peut démontrer rigoureusement la *suffisance combinatoire* de ce système formé des seuls obs **K** et **S**.

Si on applique ces règles de réductibilité et d'expansibilité à une *extension* convenable de la théorie pure des combinateurs, dans laquelle les obs «indéterminés» sont représentés par les symboles «x», «y», «z», ..., on peut démontrer certaines «égalités combinatoires», comme par exemple **BI**xy = **I**xy. (En effet **BI**xy se réduit à **I**(xy), lequel se réduit à xy, lequel est expansible en **I**xy). Cependant, on ne peut pas encore démontrer l'égalité des combinateurs **BI** et **I** (nous voulons dire l'égalité de ces combinateurs en dehors d'un contexte parlant d'obs indéterminés).

Pour passer de l'égalité **BI**xy = **I**xy à l'égalité **BI** = **I**, il faudrait disposer d'une règle plus puissante, disant par exemple que si on peut démontrer, pour tout ob concevable x, $Xx = Yx$, alors on a démontré aussi $X = Y$ [7]. Cette règle présenterait un caractère fort complexe, puisque la prémisse («Pour tout ob concevable x, on a $Xx = Yx$») contient une généralisation sur l'ensemble des obs (primitifs ou construits) et a ainsi un certain caractère d'infinité. De pareilles règles n'auraient pas le caractère de constructivité rigoureuse que la logique combinatoire exige des instruments qu'elle s'accorde.

Il y a donc lieu de rechercher si l'on ne peut pas arriver à démontrer les égalités comme **BI** = **I** en introduisant un certain système d'axiomes concrets, nous voulons dire d'axiomes ne contenant ni variables intuitives ni obs indéterminés. Pareil système d'axiomes est ce qu'on appelle un système d'*«axiomes combinatoires»*. L'invention de systèmes suffisants d'axiomes combinatoires a dû surmonter des difficultés très considérables. Nous ne pouvons commenter ici les systèmes existants. Ces axiomes sont formulés à l'aide du prédicat binaire «=». Citons un seul exemple d'un de ces axiomes: **B(~~SB~~)BK** = (BS)
BK(SB(KI)).

Enfin une étape ultérieure serait de réformuler les axiomes sans faire usage du prédicat (binaire) de l'égalité combinatoire (=), et en le remplaçant par un ob de l'égalité.

Pour cela on adopte un nouveau prédicat, uniaire cette fois, qui

[7] Dans le cas où les obs X et Y peuvent s'interpréter comme des prédicats, pareille règle reviendrait à affirmer que la théorie a un caractère purement extensionnel.

pourra s'interpréter comme la propriété qu'a l'ob auquel il convient d'être *«valable»* dans la théorie. Ce prédicat forme donc avec un ob une *assertion* de la théorie. Ce prédicat est représenté par le symbole préfixe «$\vdash$».

Dans cette formulation nouvelle, appelée la formulation *«logistique»*, les assertions de la théorie n'ont plus la forme «X = Y», mais bien la forme «$\vdash$ X». Cette fois une assertion de forme $\vdash$ *XY* invite à une nouvelle interprétation. Dans le cas où *X* peut être interprété comme un prédicat de quelque langue-objet, l'assertion $\vdash$ *XY* s'interprétera comme l'assertion (de la théorie) disant que l'ob *Y* vérifie le prédicat (de la langue-objet) X.

On introduit alors dans le système un nouvel ob, l'*ob de l'égalité*, **Q**, que vont caractériser deux règles fondamentales nouvelles:

1°. Pour tout ob X, on a $\vdash$ **Q**XX (L'égalité combinatoire est réflexive). (Si le nombre des obs primitifs est fini, on peut remplacer cette règle par un système fini d'axiomes sans variables, p.ex. $\vdash$ **QKK**, $\vdash$ **QSS** et $\vdash$ **QQQ** et une règle comme la suivante: Pour tous obs X, *Y* et Z, si on a $\vdash$ **Q**XY, on a aussi $\vdash$ **Q**(XZ)(*Y*Z).

2°. Pour tous obs X, *Y* et Z, si on a $\vdash$ **Q**XY et $\vdash$ ZX, on a $\vdash$ *ZY*. (Une des interprétations de cette règle est la suivante: Lorsque Z est un ob interprétable comme un prédicat (de quelque langue-objet), alors si on a $\vdash$ **Q**XY et si l'ob X vérifie le prédicat Z, l'ob *Y* le vérifie également. Ceci revient donc à dire que deux obs égaux entre eux possèdent les mêmes prédicats (de la langue-objet). Nous soulignons que nous ne sommes pas liés à cette interprétation, parce que l'ob Z ne doit pas nécessairement être interprétable comme un prédicat d'une langue-objet).

(La question se pose de savoir si on ne peut pas remplacer cette seconde règle pour **Q** par un système fini d'axiomes sans variables. Il sera sans doute possible de définir l'ob **Q** par d'autres obs semblables à ceux que nous introduirons dans la logique combinatoire illative, mais ceux-ci à leur tour seront caractérisés par des règles faisant usage de variables intuitives).

La 2e règle pour **Q** est de forme très différente des règles pour les combinateurs **I**, **K**, **C**, **W**, **B**, **S**. L'ob **Q** n'est donc plus un combinateur. (Ceci n'est pas une présupposition de la théorie, mais ceci résulte de la nature des règles fondamentales adoptées à propos de **Q**. Le système ne postule donc pas, au préalable, une répartition des obs en catégories distinctes).

Il est bon de signaler que la théorie des combinateurs ne possède, et ne peut pas posséder, de méthode (uniforme) permettant de décider si deux combinateurs (complexes) donnés sont ou ne sont pas combinatoirement égaux. Ce fait, loin de révéler une faiblesse du système, en manifeste au contraire l'intérêt.

La théorie des combinateurs permet de formuler toute une arithmétique des nombres entiers et des fonctions numériques récursives, et aussi toute une théorie des fonctions de vérité (à deux ou à plus de deux valeurs). Nous ne pouvons pas le montrer ici. Nous le signalons cependant pour dire que cette théorie, qui semble à première vue avoir peu de chose en commun avec une «logique» au sens habituel du mot, contient cependant bien une véritable «logique», non pas directement des «inférences» ou des «déductions», mais bien des fonctions de vérité.

Au surplus, le nombre et la grande variété des problèmes qui sont simplement de nature combinatoire sont très remarquables. La théorie des combinateurs trouve des applications dans nombre de domaines de recherches étonamment divers.

Il est démontré que la théorie des combinateurs est consistante au regard de l'égalité combinatoire, en ce sens qu'il y a des assertions de forme $X = Y$ ou $\vdash \mathbf{Q}XY$ qui n'y sont pas démontrables.

Cependant la théorie étudie certains obs qui ont des propriétés assez étranges, et qui pourront donner naissance à des antinomies dans les systèmes illatifs dont il nous reste maintenant à parler.

***

La *logique combinatoire illative,* deuxième partie de la logique combinatoire, concerne certains obs qui ont des propriétés plus ou moins analogues à celles de la relation de déductibilité (implication, inférence, raisonnement). Comme il s'agit de déductibilité formelle, il n'est pas surprenant que ces obs sont aussi liés à l'idée de «*généralisation*». Curry parle à leur propos d'«*obs de la généralité*».

Curry a élaboré trois systèmes introduisant chacun un certain ob de la généralité, caractérisé chaque fois par une certaine règle fondamentale. Ces règles, à la différence des règles pour les combinateurs, ont deux prémisses; elles sont de la forme: Si $\vdash X$ et si $\vdash Y$, alors $\vdash Z$. Dans la conclusion apparaît un ob qui ne figurait pas dans la première prémisse (appelée «majeure»), mais bien dans la seconde (appelée «mineure») ([8]).

Ces trois systèmes ne sont pas équipollents, mais semblent devoir être rangés selon un ordre de puissance croissante.

([8]) On remarquera que la 2e règle pour **Q** présentait déjà ce caractère; c'est pourquoi on peut considérer le système avec l'ob **Q** comme une sorte de transition entre la théorie pure des combinateurs et la logique combinatoire illative.

I

Le premier système, $\mathcal{F}_1$, ou système «*de la fonctionnalité*», introduit l'ob fondamental **F** par la règle suivante:
Pour tous obs X, Y, Z et V, si on a $\vdash$ **F**XYZ et $\vdash$ XV, on aura $\vdash$ $Y(ZV)$. (Une interprétation possible de cette règle: lorsque Z est interprétable comme une fonction, et que X et Y sont interprétables comme des prédicats (toujours dans une langue-objet), alors, si Z possède le «caractère fonctionnel» représenté par l'ob **F**XY, et si l'ob V vérifie le prédicat Z, alors l'ob ZV vérifie le prédicat Y. En d'autres termes, si les obs X et Y sont des «obs de catégorie», l'assertion $\vdash$ **F**XYZ signifie que l'ob Z est une fonction qui, pour un argument de la catégorie X, prend une valeur qui est de la catégorie Y. En d'autres termes encore, la fonction Z transforme un X en un Y).

On pourra poser (ou démontrer à l'aide de certaines règles) certaines assertions attribuant un caractère fonctionnel déterminé aux combinateurs et aux obs fondamentaux.

P.ex. $\vdash$ **FXXI**. (L'ob **I**, appliqué à un ob qui est de la catégorie X, forme un ob qui est aussi de la catégorie X).

$\vdash$ **F**X(**F**YX)**K**. (L'ob **K**, si on l'applique à un ob qui est de la catégorie X, prend pour valeur un ob qui est de la catégorie **F**YX, c'est-à-dire que, si ce dernier ob est lui-même appliqué à un ob qui est de la catégorie Y, il formera un ob de la catégorie X. Ceci revient à dire que si on applique le combinateur **K** à une série de deux obs dont le premier est de la catégorie X et le second de la catégorie Y, on obtient un ob qui est de la catégorie X).

$\vdash$ **F**(**F**X(**F**YZ))(**F**(**F**XY)(**F**XZ))**S** (Nous laissons au lecteur le soin de trouver une interprétation de cette assertion).

On constate que les combinateurs pour lesquels on ne peut ni poser ni démontrer de «caractère fonctionnel» sont précisément les combinateurs suspects dont nous avons parlé plus haut et qui menacent d'antinomies les systèmes illatifs qui les utiliseraient sans précautions particulières. Tels sont les combinateurs **WWW** et **SSI(SB(K(SII)))**.

Un fait remarquable est que l'ob **F** a des propriétés formelles très semblables à celles d'une certaine «implication», à savoir l'implication de la *logique absolue* (ou intuitionniste) *de l'implication pure* (sans négation) (9). On peut ainsi considérer l'ob **F** comme une sorte

(9) Ainsi, si l'on prend les thèses formelles qui expriment les caractères fonctionnels des combinateurs, si on supprime leur dernier ob (à savoir le combinateur en question), et si l'on y remplace l'ob **F** par un foncteur préfixe correspondant à l'implication de la logique absolue de l'implication pure, on

de généralisation de cette implication. Ici **F** s'applique à obs qui doivent s'interpréter comme des catégories, non à des propositions.

Il est démontré, par ailleurs, que si le système comprend, outre l'ob **F**, un système complet de combinateurs (et notamment le combinateur **W**, soit au titre d'ob primitif soit au titre d'ob construit), et si les obs *X* et *Y* dont parlent la règle pour **F** ne reçoivent pas des limitations particulières (si ces variables peuvent représenter n'importe quel ob), alors le système est inconsistant. Cette inconsistance apparaît même sans qu'il doive être fait usage d'aucun ob correspondant à l'idée de «négation» (ni la négation classique ni la négation intuitionniste).

Mais si l'on limite ces variables intuitives *X* et *Y* (dans la règle pour **F**) à un domaine restreint d'obs appelés «*obs de catégories*», alors le système ne peut mener à aucune inconsistance.

Ce résultat est de très grande portée, malgré son caractère plutôt modeste. Il permet d'espérer qu'on pourra construire des systèmes plus puissants que $\mathcal{F}_1$ et qui, eux aussi, ne mèneraient à aucune inconsistance.

On doit cependant remarquer que si l'on accepte les restrictions dont nous venons de parler pour les variables *X* et *Y* de la règle **F**, on doit poser au départ, et par convention préalable à la théorie, une certaine catégorie spéciale d'obs, les «*obs de catégorie*». Le système doit donc postuler deux espèces d'entités, les «obs sans plus» et les «obs de catégorie». Cette distinction est bien préalable à toutes les conventions qui engendrent le système; à la différence de la distinction entre combinateurs et les obs **Q** ou **F**, cette distinction-ci ne résulte pas de la forme des règles posées pour engendrer le système.

La théorie de la fonctionalité est évidemment l'instrument théorique tout indiqué pour la formulation d'une grammaire spéculative.

trouve un ensemble de thèses valables dans cette dernière logique. Par exemple, aux thèses citées plus haut, correspondent dans la notation polonaise avec foncteurs préfixes, les thèses suivantes:

(I) $\vdash \mathrm{C}pp$,

(K) $\vdash \mathrm{C}p(\mathrm{C}qp)$,

(S) $\vdash \mathrm{C}(\mathrm{C}p(\mathrm{C}qr))(\mathrm{C}(\mathrm{C}pq)(\mathrm{C}pr))$.

Les axiomes qui caractériseraient fonctionnellement un système suffisant de combinateurs fondamentaux correspondent de la sorte à un système suffisant d'axiomes pour la logique absolue de l'implication pure (moyennant d'ajouter à ces axiomes la seule règle du *Modus ponens*). (Mais la relation inverse n'est pas toujours vraie: un système suffisant d'axiomes pour la logique absolue de l'implication ne fournit pas toujours un système suffisant de combinateurs fondamentaux).

II

Un deuxième système, $\mathscr{F}_2$, appelé «*système de la généralité restreinte*» (restricted generality), introduit (au lieu de l'ob **F**) un ob primitif Ξ, caractérisé par la règle suivante:

Pour tous obs X, Y et Z, si on a $\vdash$ Ξ *XY* et $\vdash$ *XZ*, on a aussi $\vdash$ *YZ*. Voici la principale interprétation de cette règle: Si les obs X et Y sont des prédicats (d'une langue-objet), et si on a $\vdash$ Ξ *XY* et si de plus l'ob Z vérifie le prédicat X, il vérifie aussi le prédicat Y. $\vdash$ Ξ *XY* est donc une manière d'exprimer la proposition universelle classique: «Toute entité qui est un X est aussi un *Y*». (Le prédicat Y est ainsi affirmé, non de l'universalité de tous les obs, mais bien de tous les obs qui sont des X; l'universalité est donc restreinte au domaine des X.)

Dans ce système $\mathscr{F}_2$, on peut construire l'ob **F** à l'aide des seuls obs Ξ, **S** et **K**. En revanche, si l'on voulait construire dans le système $\mathscr{F}_1$, un ob qui ait toutes les propriétés de l'ob Ξ, il faudrait renforcer ce système par l'adjonction d'un axiome supplémentaire. Ceci montre que le système $\mathscr{F}_2$ est plus puissant que le système $\mathscr{F}_1$.

Le système $\mathscr{F}_2$ n'a pas encore fait l'objet d'un exposé très développé. Curry a publié (dans *Logique et Analyse*, janvier 1960 ([10])) la démonstration rigoureuse d'un épithéorème important dit «*théorème de la déduction*» pour $\mathscr{F}_2$. Ce théorème correspond au théorème de même nom pour l'implication. Ce théorème n'est toutefois valable que si les variables X et Y qui figurent dans la règle pour Ξ sont soumises à des restrictions particulières, à savoir si le domaine de variation de ces variables intuitives est limité à une certaine espèce d'obs appelés «*obs canoniques*». (Les obs canoniques peuvent être interprétés comme des prédicats d'ordre indéterminé, c'est-à-dire devant s'appliquer à un nombre indéterminé d'arguments; les «obs de catégorie» du sytème $\mathscr{F}_1$ étaient des prédicats pour un seul argument). La nécessité ici aussi de distinguer deux espèces d'obs, les obs tout courts et les «obs canoniques» appelle une remarque analogue à celle que nous avons faite au sujet du système $\mathscr{F}_1$.

III

Un troisième système, $\mathscr{F}_3$, appelé «*système de la généralité universelle*» (combinatorial theory of universal generality), introduit (au lieu de **F** ou de Ξ) deux autres obs: **Π** et **E**.

([10]) On voudra bien reporter dans le texte de cet article les corrections indiquées dans le présent numéro à la page 241.

La règle pour **E** est la suivante:
Pour tout ob X, on a $\vdash$ **E**X. (L'ob **E** est donc le prédicat universel, celui qui est vérifié par toutes les entités que la théorie peut concerner.)

Comme pour l'ob **Q**, lorsque le nombre des obs primitifs est fini, on peut remplacer cette règle par un système fini d'axiomes, plus une règle disant: Pour tous obs X et Y, si on a $\vdash$ **E**X et $\vdash$ **E**Y, on a aussi $\vdash$ **E** (XY).

La règle pour Π est la suivante:

Pour tous obs X et Y, si on a $\vdash$ Π X et $\vdash$ **E**Y, on a aussi $\vdash$ XY. (L'assertion $\vdash$ Π X signifie donc que tous les obs vérifient la proriété X. C'est donc une assertion universelle sans restriction.)

A ces deux obs de la généralité, on ajoute alors un «*ob de l'implication*», l'ob **P**, caractérisé par la règle:

Pour tous les obs X et Y, si on a $\vdash$ **P**XY et $\vdash$ X, on a aussi $\vdash Y$. (Lorsque les obs X et Y sont interprétables comme des propositions (de quelque langue-objet), la règle pour **P** correspond à la règle familière du *modus ponens*.)

(Dans le système $\mathcal{F}_2$, l'ob **P** pouvait se construire à l'aide des obs Ξ, **S** et **K**; tandis que l'ob Π y supposerait les obs Ξ et **E**.)

Le problème essentiel est de définir formellement la catégorie des «propositions», c'est-à-dire des obs que l'on pourra interpréter comdes propositions dans quelque langue-objet.

Curry a démontré que si on accepte pour l'ob **P** les schémas d'axiomes suivants:

Pour tous obs X, on a $\vdash$ **P**XX (réflexivité universelle de **P**),

Pour tous obs X et Y, on a $\vdash$ **P**(**P**X(**P**XY))(**P**XY), (lequel correspond dans la logique absolue de l'implication pure au théorème bien connu: $\vdash$ $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$),

et si on n'impose aucune restriction aux variables intuitives X et Y dans ces schémas d'axiomes, le système est inconsistant.

Nous sommes ici, semble-t-il, en présence de la racine la plus secrète des fameuses antinomies logiques. La logique combinatoire semble bien outillée pour aborder ce rpoblème de face. Il est sans doute encore prématuré d'essayer de prédire dans quelle mesure elle réussira à le résoudre. Mais les résultats partiels déjà acquis autorisent de sérieux espoirs.

Université de Louvain J. Dopp