REMARQUES SUR LE CONSTRUCTIVISME

A. HEYTING

Par «constructivisme» nous entendons cette tendance dans la philosophie des mathématiques qui attribue une valeur spéciale aux méthodes constructives. Un constructiviste modéré admettra au moins qu'une démonstration constructive d'un théorème T donne plus d'information qu'une démonstration non-constructive de T. Par exemple, soit A un prédicat et soit D une démonstration non-constructive de $(Ex)A(x)$. Pour un mathématicien non-constructiviste, qui considère les théorèmes mathématiques comme se rapportant à une réalité indépendante de notre connaissance, une méthode de construction C pour un objet b tel que A(b), n'ajoute rien au résultat de la démonstration non-constructive D; l'information contenue dans la construction C ne porte pas sur la réalité mathématique, mais seulement sur la connaissance que nous en avons. Sans doute il peut arriver qu'incidemment C nous donne de nouveaux renseignements sur la réalité mathématique, mais ce qui importe pour le moment c'est que, en tant de construction de b, elle n'ajoute rien à l'existence de b. Pour le constructiviste, au contraire, C établit l'existence de b en un sens différent de celui de l'existence pure. Pour lui les mathématiques sont liées essentiellement à la connaissance humaine.

Les mathématiciens constructivistes au sens plus strict préfèrent un autre emploi du mot «exister», qui permet de distinguer clairement entre l'existence constructive, celle que nous ne pouvons constater que par la construction effective de l'objet, et l'existence non-constructive. Ils réservent le mot «exister» pour l'existence constructive. Alors $(Ex)A(x)$ ne peut être affirmé qu'après la construction d'un b tel que A(b). Ils s'opposent à l'emploi du mot «exister» pour indiquer l'existence non-constructive, parce que cette terminologie suggère l'idée d'une réalité mathématique indépendante de notre connaissance. L'hypothèse d'une telle réalité mathématique est de nature métaphysique; le but des constructivistes est de libérer les mathématiques de telles hypothèses philosophiques. On atteint ce but en formulant les énoncés de telle manière qu'ils expriment exactement ce qui a été démontré.

Par exemple, si l'hypothèse qu'aucun objet ne possède la propriété A a été réduite à l'absurde, on énonce $\neg\neg(Ex)A(x)$, où $\neg$ désigne la négation. Cet énoncé exprime exactement quelle démonstration a été faite, sans donner une interprétation philosophique du résultat.

Pour résumer, je dis que (Ex)A(x) signifiera qu'un objet mathématique b tel que A(b) a été construit; $\neg\neg$(Ex)A(x) signifiera que l'hypothèse qu'aucun objet ne satisfait à A(x) a été réduite à l'absurde. Comme ces deux énoncés ont des sens différents, la règle logique $\neg\neg p \rightarrow p$ ne s'applique pas.

Au lieu de nous étendre sur le point de vue constructiviste, bien connu aujourd'hui, examinons-en quelques conséquences.

Une première remarque utile est qu'on ne peut pas se borner à des constructions réellement effectuées; cela reviendrait à réduire les mathématiques à l'arithmétique des nombres naturels assez petits. Il faut donc admettre des constructions qu'on considère comme possibles sans qu'elles soient réellement exécutées. Cela ne signifie pas qu'on se base sur quelque logique des modalités. La notion générale d'une construction possible doit être acceptée comme une notion primitive; cependant pour une théorie particulière, des règles peuvent être données pour spécifier quelles constructions y seront considérées comme possibles. Par exemple, dans la théorie des nombres naturels (concrétisés par des suites de barres), | est constructible; si *n* désigne un nombre constructible, *n*| est considéré comme constructible.

Il faut bien distinguer d'une part la construction et d'autre part le théorème qui en décrit le résultat. Ce sont les constructions qui forment l'activité mathématique. Les théorèmes sont des affirmations sur cette activité; elles n'appartiennent pas à la mathématique au sens strict. Par exemple le théorème «2+2=4» affirme la réussite d'une construction formée des cinq parties suivantes:
I et II: construction répétée du nombre 2; III: construction de la somme 2+2; IV: construction du nombre 4; V: construction d'une correspondance bi-univoque entre les résultats (suites d'entités) de III et de IV. Une analyse analogue donne le sens d'autres égalités numériques comme 3+4=4+3.

Pour l'interprétation d'un énoncé général comme «a+b=b+a pour des nombres naturels quelconques a et b», l'analyse précédente ne suffit pas. Il faut partir de l'hypothèse que (I et II) deux nombres naturels a et b ont été construits; alors on peut (III et IV) construire les sommes a+b et b+a, et (V) construire la correspondance bi-univoque qui établit leur égalité. Deux nouvelles idées entrent dans cette analyse: celle d'une construction hypothétique et celle d'une méthode générale de construction. Toutes les deux sont indispensables pour pouvoir faire des énoncés généraux. En partant de constructions réellement effectuées on n'obtient jamais que des théorèmes particuliers. Pour démontrer un théorème sur tous les éléments d'une espèce A, il faut d'abord faire l'hypothèse qu'un élément quelconque b de A ait été construit, et ensuite indiquer comment, par une méthode générale de construction, on passe de b à la conclusion du théorème. Cette analyse précise le sens du quantificateur général. La proposition $(x)P(x)$, par exemple, où le domaine de x est l'espèce des nombres réels, ne se rapporte pas à la totalité des nombres réels, mais à un nombre réel quelconque, supposé défini d'avance.

Comme pour l'interprétation des énoncés généraux, la notion d'une construction hypothétique est aussi indispensable pour comprendre le sens de la négation. Par exemple, pour démontrer que $2+2=5$ est faux, on fait les constructions suivantes: I et II: construction répétée du nombre 2; III: construction de $2+2$; IV: construction de 5; V: construction hypothétique d'une correspondance bi-univoque entre les résultats de III et de IV; VI: méthode générale pour déduire de V une contradiction. Dans le cas de $2+2=5$, la construction V s'obtient en faisant correspondre une à une les entités dont se compose 4 à des entités dont se compose 5; on constate (VI) qu'il y a toujours une entité de 5 qui reste sans correspondant. Comme la construction V est hypothétique, la méthode s'applique à toute correspondance entre 4 et 5, de sorte qu'on a le droit d'affirmer la négation de $2+2=5$. Brouwer [1, p. 126] a fait à ce sujet une remarque bien utile. Comme on le voit dans l'exemple simple considéré ici, la construction hypothétique V ne remplit pas toutes les conditions du problème (ce qui d'ailleurs serait impossible). En effet, nous construisons une correspondance biunivoque entre 4 et une sous-espèce de 5; ensuite nous constatons que cette sous-espèce n'épuise jamais 5. Plus généralement, en démontrant la négation d'une proposition P, nous décrivons une construction satisfaisant une partie des conditions contenues en P, et nous constatons qu'elle viole l'une des autres conditions (1). Toutefois on ne peut pas dire que la négation se réduise aux notions de construction hypothétique et de méthode générale, car la constatation que certaines conditions ne sont pas remplies est un acte mental d'une nouvelle espèce.

Les principales notions fondamentales des mathématiques con-

(1) A l'endroit cité, Brouwer conteste la nécessité de constructions hypothétiques. Son argument est valable en ce qu'on ne doit pas imaginer une correspondance biunivoque entre 4 et 5 pour constater qu'elle ne peut pas exister. Mais il oublie qu'il faut démontrer que *toute* correspondance biunivoque entre 4 et un sous-ensemble de 5 laisse échapper une entité de 5; on ne peut démontrer cette affirmation générale qu'en parlant d'une correspondance hypothétique.

structives, rencontrées jusqu'ici, sont I: construction d'un nombre naturel, II: construction hypothétique, III: méthode générale de construction, IV: contradiction. Il est impossible de donner de ces notions une définition satisfaisant aux conditions mathématiques de précision. D'ailleurs, elles ne sont pas des notions primitives au sens donné à ce mot dans les mathématiques formelles. Nous venons de les trouver a posteriori par une analyse des constructions mathématiques, mais elles ne sont pas posées a priori à la base de ces constructions. Les mathématiques se développent par une activité libre de l'esprit; ce n'est qu'après coup que nous isolons dans cette activité des notions et des méthodes caractéristiques. Autrement dit, il y a d'abord les mathématiques concrètes, ensuite par un travail d'analyse nous pouvons construire une théorie abstraite des mathématiques.

Rien ne nous garantit que les quatre notions fondamentales que nous venons d'énumérer suffisent pour édifier toutes les mathématiques constructives. Au contraire, la notion de suite indéfinement prolongeable, introduite par Brouwer, ne semble pas s'y réduire. (L'expression «suite de choix» n'est pas adéquate pour cette notion, parce qu'elle suggère une subjectivité que même les constructivistes ne voudraient pas introduire en mathématiques).

Si l'on veut édifier la théorie des nombres réels d'un point de vue constructiviste, on se trouve devant le dilemme suivant.

D'une part, on peut se borner aux nombres réels définis individuellement par des procédés constructifs. Lorsque Brouwer concevait sa théorie des nombres réels, la notion d'un nombre réel défini constructivement, ou, comme il s'exprime, défini par une loi, était plus ou moins vague; elle n'a été précisée que beaucoup plus tard dans la théorie des fonctions récursives. Aujourd'hui cette théorie est bien connue; il suffira de rappeler qu'on peut, par exemple, définir un nombre réel récursif par une série $\Sigma a_n 2^{-n}$, où a_n est une fonction récursive de n, ne prenant que les valeurs 0 et 1. Une analyse récursive, basée sur cette notion de nombre réel, est en cours d'élaboration avec des résultats bien intéressants, mais elle reste essentiellement dans le domaine du dénombrable.

En introduisant les suites de choix, Brouwer était conduit par deux motifs. D'abord le caractère indéfini et vague de la notion de loi, et ensuite surtout le désir de transcender le dénombrable pour arriver à une forme de l'analyse mathématique constructive qui soit plus proche de l'analyse classique. Et l'argument décisif pour risquer le bond était celui-ci, que la notion de loi n'entre pas du tout dans les définitions des opérations sur les nombres réels. Plus exactement, soit $f(x)$ une fonction continue d'une variable réelle; si a est un nombre réel, dont on ne connaît qu'une valeur approximée a_1, cela suffira pour calculer une valeur approximée b_1 de f(a). Donc, pour calculer b de proche en proche, il suffit que les approximations de a deviennent connues l'une après l'autre, n'importe comment. Cela veut dire qu'une fonction continue établit une correspondance, non seulement entre nombres réels constructifs, mais aussi entre nombres réels définis par des suites indéfiniment prolongeables (suites de choix) de nombres rationnels. Cependant, même pour les fonctions définies pour des suites de choix, le principe du constructivisme se maintient. Une telle fonction $f(x)$ n'est considérée comme bien définie que lorsque sa définition nous permet de calculer effectivement toute valeur approximée de f(a) partant d'une valeur approximée de a. Cette notion de fonction effectivement calculable a été précisée par celle de fonction récursive; cependant, il faut se garder de croire que la dernière pourrait remplacer la première. Une fonction récursive est définie par un système d'équations, qui doit être effectivement donné; c'est ici que la notion de l'effectivement calculable entre dans la définition d'une fonction récursive.

Quant à la relation entre les deux notions de fonction récursive et de fonction (effectivement) calculable, deux questions se posent. Toute fonction calculable est-elle récursive ? Toute fonction récursive est-elle calculable ?

L'assertion que toute fonction calculable est récursive est connue sous le nom de thèse de Church. Il y a beaucoup d'arguments pour la rendre vraisemblable (2), mais aucun ne peut être regardé comme une preuve de la thèse. Or, tant que pareille preuve n'est pas connue, je préfère distinguer les deux notions. Dans l'état actuel de nos connaissances, la démonstration qu'une propriété E est vraie pour toute fonction calculable, nous donne plus d'information qu'une démonstration de E qui ne s'applique qu'aux fonctions récursives.

Il est plus difficile de répondre à l'autre question, parce que la réponse dépend de la logique qu'on veut appliquer. Une fonction récursive f est donnée par un système d'équations S; si l'on applique la logique usuelle, dite classique, il est permis de démontrer l'existence de S par un raisonnement par l'absurde, c'est à dire en démontrant qu'il est impossible que S n'existe pas, et d'en conclure que f est récursive. Or, une telle démonstration non-constructive de l'existence de S ne nous donne pas le moyen de trouver effectivement S, ni, par suite, de calculer effectivement f. Il faut donc conclure qu'en acceptant la logique classique, nous n'avons pas le droit

(2) Voir p.e. [2], § 62, 69.

d'affirmer que toute fonction récursive est calculable. Depuis quelques années la théorie des fonctions récursives est en train de s'émanciper de la recherche des fondements; plusieurs mathématiciens s'en occupent qui s'intéressent plus au développement des mathématiques qu'à leur fondation. En général ils appliquent la logique classique, de sorte que leurs résultats sur les fonctions récursives ne s'appliquent pas toujours aux fonctions calculables. Par exemple, un prédicat de nombres naturels qui est récursivement énumérable et dont le complément est aussi récursivement calculable, est récursif au sens classique, mais il ne doit pas être décidable.

La réponse est différente si l'on applique la logique intuitionniste. J'ai rappelé au commencement de cette note qu'en mathématiques constructives la règle logique $\neg\neg p \rightarrow p$ ne s'applique pas sans restriction. Cela veut dire qu'il est naturel d'appliquer aux questions de calculabilité la logique intuitionniste, au lieu de la logique classique. Dans la théorie des fonctions récursives, basée sur la logique intuitionniste, il est évident que toute fonction récursive est calculable.

[1] L.E.J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde.* Thèse, Amsterdam 1907.

[2] S.C. Kleene, *Introduction to metamathematics.* Amsterdam-Groningen-New York 1952.

Université d'Amsterdam A. Heyting