OBSERVATIONS AU SUJET DU RAISONNEMENT INDIRECT

E. W. BETH

Selon une opinion fort répandue, le raisonnement indirect est inférieur au raisonnement direct, sauf les cas où il s'agit d'établir une conclusion négative. Par conséquent on préfère assez souvent, même dans les cas où un raisonnement indirect paraît se présenter d'une manière naturelle, qu'il soit converti après coup en un raisonnement direct ([1]).

Dans la présente étude je me propose d'analyser les circonstances qui expliquent pourquoi, même pour une conclusion affirmative, il arrive souvent qu'un raisonnement indirect s'impose et que sa conversion en un raisonnement direct s'avère extrêmement pénible. Je souligne que je ne m'occuperai ici que du *raisonnement classique*.

La méthode de cette étude sera la suivante. J'ai montré ailleurs ([2]) qu'un point de départ approprié pour une logique théorique consiste à construire des *tableaux sémantiques* qui, s'ils peuvent se clôturer, peuvent être transformés en des déductions formelles appartenant à un certain *système de déduction naturelle* F semblable au système NK de Gentzen. Nous verrons toutefois que, dans certains cas, cette transformation donne lieu à des complications assez surprenantes qu'on ne peut éviter que moyennant d'admettre que la déduction

([1]) Des objections ou des réserves à l'égard du raisonnement indirect (ou raisonnement par l'absurde) sont exprimées par: A. SCHOPENHAUER, *Die Welt als Wille und Vorstellung*, 1. Buch, § 15; E. GOBLOT, *Traité de logique*, Paris, 1918 [p. 277]; R. L. GOODSTEIN, *Proof by reductio ad absurdum*, in *Math. Gazette*, 32 (1948), pp. 198-204; G. BOULIGAND et J. DESGRANGES, *Le déclin des absolus mathématico-logiques*, Paris, 1949 [p. 229]; E. LEFÈBVE, *Structure et objet de l'analyse mathématique*, Paris, 1958 [pp. 116-17]. Cette forme du raisonnement est défendue par: G. W. LEIBNIZ, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, IV, viij, § 2; Chr. SIGWART, *Logik*, 5e éd., vol. II, Tübingen, 1924 [pp. 295-98]; O. HÖLDER, *Die mathematische Methode*, Berlin, 1924 [pp. 266-69]; G. POLYA, *How to Solve It*, 2e éd., New York, 1957 [pp. 162-71]. Sur la transformation systématique du raisonnement indirect en raisonnement direct, voir: L. LÖWENHEIM, *On Making Indirect Proofs Direct*, translated by W. V. QUINE, in *Scripta Math.*, 12 (1946) [pp. 125-39]; cf. R. L. GOODSTEIN, l.c.; G. POLYA, l.c.

([2]) E. W. BETH, *Quelques remarques sur la sémantique*, in *Revue philos. de Louvain*, 54 (1956), pp. 607-625.

formelle peut avoir la forme d'un raisonnement indirect. Ce fut M. Hugues Leblanc qui porta mon attention sur ce point lorsqu'il me posa, à l'occasion d'une communication que j'eus l'honneur de présenter en mai 1957 à Bryn Mawr devant le Fullerton Club, un problème sur lequel je reviendrai tout à l'heure.

Les règles de construction pour les tableaux sémantiques seront supposées connues. Nous ne partirons cependant pas de règles de transformation fixées d'avance. En effet, dans le choix de ces règles on a une certaine liberté, mais leur choix détermine en même temps la structure du système de déduction naturelle F qui résultera. On peut donc se proposer de choisir les règles de transformation de manière à éviter l'intervention de raisonnements indirects. Nous verrons précisément qu'une tentative dans cette direction sera vouée à l'insuccès, à moins qu'on ne se résigne à accepter des règles de transformation fort compliquées et artificielles.

Je ne donnerai pas un exposé systématique. Il me paraît plus intéressant de discuter un certain nombre d'exemples typiques.

(1) Notre premier exemple se rapporte au problème de déduction noté:

$$(x)[A \to B(x)] \;/\; A \to (y)B(y),$$

et qui consiste à déduire, en partant de la prémisse $(x)[A \to B(x)]$, la conclusion $A \to (y)B(y)$.

La construction du tableau sémantique produit le résultat suivant.

Vrai		Faux	
(1) $(x)[A \to B(x)]$ (3) A (6) $A \to B(a)$		(2) $A \to (y)B(y)$ (4) $(y)B(y)$ (5) $B(a)$	
	(8) $B(a)$	(7) A	

Il est évident que la déduction formelle qui correspond à ce tableau sera:

(1)	$(x)[A \to B(x)]$	[prem]
(3)	A	[+ hyp 1]
(6)	$A \to B(a)$	(1)
(5)	$B(a)$	(3), (6)
(4)	$(y)B(y)$	(5)
(2)	$A \to (y)B(y)$	[— hyp 1]

Il sera donc raisonnable de fixer les règles de transformation de telle manière que dans le cas présent leur application produise cette déduction formelle.

(2) Comme deuxième exemple je prends le problème de déduction:

$$0 \;/\; (\mathrm{E}x)[A(x) \rightarrow (y)A(y)]$$

qui consiste à déduire la conclusion $(\mathrm{E}x)[A(x) \rightarrow (y)A(y)]$ sans faire appel à aucune prémisse. La construction du tableau sémantique ne présente aucun problème:

Vrai	Faux
	(1) $(\mathrm{E}x)[A(x) \rightarrow (y)A(y)]$
	(2) $A(a) \rightarrow (y)A(y)$
(3) $A(a)$	(4) $(y)A(y)$
	(5) $A(b)$
	(6) $A(b) \rightarrow (y)A(y)$
(7) $A(b)$	(8) $(y)A(y)$

Si toutefois nous imitons la transformation effectuée dans le cas précédent, nous obtenons une suite disparate de formules où personne ne verra une déduction formelle.

(3) De même pour le problème de déduction:

$$0 \;/\; (A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}],$$

qui donne lieu au tableau sémantique:

Vrai		Faux	
		(1) $(A \rightarrow C) \rightarrow [\ldots]$	
(2) $A \rightarrow C$		(3) $(B \rightarrow C) \rightarrow \{\ldots\}$	
(4) $B \rightarrow C$		(5) $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C$	
(6) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$		(7) C	
	(9) C	(8) B	
	(11) B	(10) $A \rightarrow B$	
(12) A		(13) B	
	(15) C	(14) A	

[Il convient de «traiter» d'abord la formule (4), ensuite la formule (6), ensuite la formule (10) et seulement en dernier lieu la formule (2).]

(4) J'ai introduit ailleurs [3] des *tableaux déductifs* qui se distinguent des tableaux sémantiques par le fait qu'une nouvelle formule Y insérée dans la colonne de droite d'un tableau déductif «*supplante*» les formules précédentes Z ... dans cette colonne, de sorte que ce n'est que la dernière formule dans la colonne de droite d'un tableau déductif qui puisse éventuellement produire la clôture.

Vrai	Faux
K	L'
	Z
⋮	⋮
	Y
⋮	⋮
Z	⋮

Prémisses	Conclusions
K	L'
⋮	Z
⋮	⋮
⋮	⋮
Z	Y

Un tableau déductif clos se prête, pour ainsi dire, par définition à être transformé immédiatement en une déduction formelle dans un système de déduction naturelle, ce qui n'est pas, en général, le cas pour un tableau sémantique. D'autre part les tableaux déductifs, sous leur forme authentique, ne répondent qu'à la logique intuitioniste; seuls les tableaux sémantiques sont entièrement adéquats à la logique classique.

Il s'agira donc d'imaginer un artifice permettant de combiner les avantages des deux sortes de tableaux. D'une part il faudra que dorénavant le tableau sémantique reconnaisse qu'une formule introduite dans la colonne de droite supplante celles qui la précédaient, sans que toutefois la possibilité de clôturer les sous-tableaux soit affectée; de l'autre, il faut que le tableau déductif s'adapte à la logique classique sans abandonner son caractère propre.

Une première solution de ce problème [3] consiste à neutraliser les effets de la supplantation d'une formule Z par une formule Y insérée plus tard, en adjoignant à l'antécédent la formule $[(Z \rightarrow Y) \rightarrow Z] \rightarrow Z$ (*loi de Peirce*). Pour notre but présent cette solution n'est pas la meilleure.

[3] E. W. Beth, *Considérations heuristiques sur les méthodes de déduction par séquences,* in *Logique et Analyse,* 2 (1959), pp. 153-159.

Il est préférable d'adjoindre à l'antécédent la formule $[(Z \rightarrow \overline{Z}) \rightarrow Z] \rightarrow Z$, ou plus simplement $(\overline{Z} \rightarrow Z) \rightarrow Z$.

Au point de vue sémantique, le même résultat est obtenu en vertu de la simple remarque que la fausseté de la formule Z est équivalente à la vérité de sa négation $\overline{Z}$.

Vrai	Faux
K	L'
$[\overline{Z}]$	Z
⋮	⋮
⋮	Y
Z	⋮
	[Z]

Prémisses	Conclusions
K	L'
$[(\overline{Z} \rightarrow Z) \rightarrow Z]$	Z
[Z]	$[\overline{Z} \rightarrow Z]$
$[\overline{Z}]$	[Z]
	Y
Z	[Z]

Le résultat de cette discussion peut être formulé de la manière suivante. Soit K / V un problème de déduction qui donne lieu à un tableau sémantique clos. Il peut arriver que quelquefois la clôture d'un sous-tableau ait été produite par une formule Z dans la colonne de droite qui, d'après les règles pour les tableaux déductifs, eût été supplantée par une formule Y insérée plus tard. Alors nous insérons, dans la colonne de gauche conjugée, la formule $\overline{Z}$; cela se fait à l'instant même de l'introduction de la formule Z dans la colonne de droite; de plus, la formule Z est réintroduite dans la colonne de droite à l'instant de la clôture.

Le tableau sémantique qui résulte sera également clos et, au point de vue formel, il peut être considéré comme un tableau déductif. Aussi sa transformation en une déduction formelle ne présentera plus aucune difficulté.

(5) Pour le problème de déduction discuté sous (3), et qui correspond à la question soulevée par M. Hugues Leblanc, nous obtenons maintenant le tableau sémantique suivant:

Vrai		Faux	
(2) $A \to C$ (4) $B \to C$ (6) $(A \to B) \to B$ (7′) $\overline{C}$		(1) $(A \to C) \to [\ldots]$ (3) $(B \to C) \to \{\ldots\}$ (5) $[(A \to B) \to B] \to C$ (7) C	
	(9) C	(8) B	
(12) A	(11) B	(10) $A \to B$ (13) B	
	(15) C	(14) A	(7″) C

d'où la déduction formelle suivante:

(2)	$A \to C$	[+ hyp 1]
(4)	$B \to C$	[+ hyp 2]
(6)	$(A \to B) \to B$	[+ hyp 3]
(7′)	$\overline{C}$	[+ hyp 4]
(12)	A	[+ hyp 5]
(15)	C	(2), (12)
(13)	B	(7′), (15)
(10)	$A \to B$	[— hyp 5]
(8)	B	(6), (10)
(7)	C	(4), (8) [— hyp 4]
(5)	$[(A \to B) \to B] \to C$	[— hyp 3]
(3)	$(B \to C) \to \{\ldots\}$	[— hyp 2]
(1)	$(A \to C) \to \{\ldots\}$	[— hyp 1]

Cette déduction a, me semble-t-il, un caractère parfaitement naturel.

(6) De même, le problème de déduction discuté sous (2) donne lieu au tableau sémantique suivant:

Vrai	Faux
(1′) $\overline{(\mathrm{E}x)[A(x) \to (y)A(y)]}$	(1) $(\mathrm{E}x)[A(x) \to (y)A(y)]$
	(2) $A(\mathrm{a}) \to (y)A(y)$
(3) $A(a)$	(4) $(y)A(y)$
(5′) $\overline{A(b)}$	(5) $A(b)$
	(1″) $(\mathrm{E}x)[A(x) \to (y)A(y)]$
(7) $A(b)$	(6) $A(b) \to (y)A(y)$
	(8) $(y)A(y)$
	(5″) $A(b)$

qui se transforme immédiatement dans la déduction formelle suivante:

(1′)	$\overline{(\mathrm{E}x)[A(x) \rightarrow (y)A(y)]}$	[+ hyp 1]
(3)	$A(a)$	[+ hyp 2]
(5′)	$\overline{A(b)}$	[+ hyp 3]
(7)	$A(b)$	[+ hyp 4]
(8)	$(y)A(y)$	(5′), (7)
(6)	$A(b) \rightarrow (y)A(y)$	[— hyp 4]
(1″)	$(\mathrm{E}x)[A(x) \rightarrow (y)A(y)]$	(6)
(5)	$A(b)$	(1′), (1″) [— hyp 3]
(4)	$(y)A(y)$	(5)
(2)	$A(a) \rightarrow (y)A(y)$	[— hyp 2]
(1)	$(\mathrm{E}x)[A(x) \rightarrow (y)A(y)]$	[— hyp 1]

(7) Pour les énoncés O / $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$ (*loi de Peirce*) et O / $(\mathrm{E}x)[(Ey)A(y) \rightarrow A(x)]$ (*loi de Platon*), on obtient un résultat tout à fait analogue. Dans les deux cas il s'agit de formules qui, au point de vue intuitioniste, ne doivent pas être considérées comme universellement valables.

8) Arrivés au terme de notre exposé, nous comprenons comment il faut expliquer les difficultés que peut soulever la transformation d'un tableau sémantique clos en une déduction formelle; nous pouvons constater également que pour vaincre ces difficultés il convient d'avoir recours à un artifice que nous avons introduit sous (4) et qui peut être considéré comme un schéma de construction supplémentaire. Il existe d'autres solutions, notamment le recours à la loi de Peirce, qui ont l'avantage d'éviter l'intervention de la négation; toutefois les déductions formelles qu'elles produisent n'ont guère un caractère naturel.

D'autre part, la déduction formelle qui résulte de la transformation d'un tableau sémantique clos où intervient notre schéma supplémentaire aura inévitablement (soit en partie, soit dans son ensemble) le caractère d'un raisonnement indirect qui consiste à déduire la conclusion (intermédiaire ou finale) Z au moyen d'une réduction à l'absurde de la supposition $\overline{Z}$. Dans les cas que nous venons d'étudier un tel raisonnement se présente d'une manière parfaitement naturelle, tandis qu'un raisonnement direct serait artificiel et compliqué.

Il semble donc que, pour la logique classique, il peut arriver que le raisonnement indirect constitue la méthode la plus naturelle pour établir même une conclusion affirmative, à l'encontre de l'opinion des différents auteurs cités au début de cette étude. Et notre discussion permet d'entrevoir que, dans les cas étudiés, un certain système de déduction naturelle F ne permettrait même pas d'établir la conclusion voulue au moyen d'un raisonnement direct.

Avant de terminer, je veux souligner que, si la transformation d'un tableau sémantique clos en une déduction formelle ne soulève pas les difficultés discutées, cela ne prouve pas que la déduction formelle qui résulte de la transformation sera concluante au point de vue intuitioniste.

14 mars 1960.

Instituut voor Grondslagenonderzoek en Philosophie der Exacte Wetenschappen. Universiteit van Amsterdam.

E. W. BETH