LE PARADOXE DU MENTEUR DANS LES LANGAGES NATURELS

S. ISSMAN

Le paradoxe du menteur surgit dans tout langage qui satisfait aux conditions suivantes:

(a) Il est possible de dénommer dans le langage lui-même chacun de ses énoncés,

(b) Il contient les constantes logiques usuelles et, à titre d'énoncés valides, les lois logiques qui les régissent; il contient aussi le terme «vrai» (et donc le terme «faux» qui signifie «non vrai»),

(c) Sont valides dans le langage les équivalences de la forme

A est vrai si et seulement si B,

où A est le nom de l'énoncé B de ce langage.

Ainsi, supposons que la langue française satisfasse à ces conditions et que le seul énoncé contenu dans le livre R soit

(1) L'énoncé que contient le livre R est faux.

Dans ce cas, nous obtenons en vertu de (c):

L'énoncé (1) est vrai si et seulement si
l'énoncé que contient le livre R est faux;

de cette équivalence et des suppositions que nous avons faites suit immédiatement:

L'énoncé (1) est vrai si et seulement si
l'énoncé (1) est faux.

Les langages naturels satisfont à certaines des conditions (a), (b) et (c). Ils permettent en effet, en général du moins, de dénommer leurs propres énoncés. Ils satisfont généralement aussi à la condition (b). Mais il n'est nullement établi qu'ils satisfont à la condition (c): certaines restrictions imposées à cette condition permettent d'éviter le paradoxe du menteur.

Il ne peut être question de formaliser un langage naturel; nous envisagerons donc un langage L qui soit aussi apparenté que possible à un tel langage; L satisfait aux conditions (a) et (b); nous supposerons que L est formalisé dans la logique élémentaire et que dans L a été définie l'expression «énoncé de L».

Sont axiomes de L:

(1) Les axiomes de la logique élémentaire (et, éventuellement, ceux des mathématiques usuelles),

(2) Un ensemble fini d'énoncés empiriques que l'on peut envisager comme la classe des énoncés (empiriques) effectivement établis,

(3) Les énoncés de la forme

vrai (AB) = vrai (A). vrai (B)

vrai (A') = — vrai (A),

où AB est le nom du produit logique des énoncés dont A et B sont respectivement le nom, A' le nom de la négation de l'énoncé dont A est le nom, «=» le signe de l'équivalence et «.» le signe du produit logique. (L'implication sera dénotée par «→»).

(Q) Les énoncés de la forme

vrai (A) = B,

où A est le nom de l'énoncé B, B étant de degré p, pour un nombre naturel p donné. La notion d'«énoncé de degré p» se définit comme suit:

(a) Un énoncé est de degré O: il ne contient pas le terme «vrai»,

(b) Un énoncé est de degré 1: ou bien il est de degré O; ou bien les termes «vrai» qu'il contient sont appliqués exclusivement à des noms d'énoncés de degré O ou à des variables liées (un énoncé ne contient pas de variables libres) restreintes à des énoncés de degré O. Ainsi, «vrai (A)», où A est le nom d'un énoncé de degré O, est un énoncé de degré 1. «Il existe un énoncé de degré O dans L qui est vrai» et «Tous les énoncés de degré O dans L sont vrais», sont de degré 1.

(c) Un énoncé est de degré p: définition analogue à celle d'«énoncé de degré 1».

Sont théorèmes de L: les énoncés obtenus par déduction à partir des axiomes; si B est théorème et A son nom, «vrai (A)» est théorème.

Il est aisé d'établir les résultats suivants:

(1) Soit B un énoncé de L et A son nom; si l'équivalence entre les énoncés B et B' est un théorème de L et si A' est le nom de B', alors

vrai (A') = B'

est théorème de L.

(2) Si L est consistant et contient à titre de théorème la traduction de

Le seul énoncé contenu dans le livre R est

(a): L'énoncé que contient le livre R est faux,

alors L est incomplet.

En effet, soit B la traduction de (a) et A son nom; si B est théorème de L, l'équivalence

vrai (A) = B

l'est aussi, de même que

vrai (A) = — vrai (A);

si la négation de B (dont A' est le nom) est théorème de L, «vrai (A)» et «vrai (A')» sont théorèmes de L, ce qui est impossible.

(3) Soit un énoncé de degré p. Les termes «vrai» qu'il contient éventuellement sont éliminables dans le sens suivant de l'expression «éliminer»:

«vrai (A)», où A est le nom d'un énoncé de degré p-1, peut être remplacé par cet énoncé (en vertu de (Q)); si «vrai» est appliqué à une variable (liée), cette variable est restreinte aux énoncés de degré p-1; la partie de l'énoncé où figure de la sorte le prédicat «vrai» a la forme «(Ex). x de degré p-1. A (x)» ou la forme «(x). x de degré p-1 → B (x)», si, dans cette partie, l'on fait abstraction du quantificateur, et que l'on substitue à «x» le nom d'un énoncé quelconque de L, l'on obtient une expression d'où l'on peut éliminer le terme «vrai», en se servant, selon le cas, de (Q), d'une expression logiquement vraie ou d'une expression contradictoire adéquatement choisie.

La règle et les axiomes de L relatifs au terme «vrai» ne sont pas tout à fait artificiels; ils ne sont pas sans rapports avec l'usage qu'il est fait de ce terme dans les langages naturels.

Lorsqu'un énoncé est établi, il peut être traité de «vrai»; c'est pourquoi, les équivalences de (c) sont valables quand B est un théorème, que B soit ou non un énoncé de degré p.

Un énoncé qui contient le terme «vrai» n'a un contenu informatif réel que si ce terme peut en être éliminé; du point de vue logique, le prédicat «vrai» est superflu. Il est éliminable, dans un sens très fort de cette expression, de tous les énoncés de degré p; peut-être l'est-il, dans un sens plus faible de la même expression, de certains énoncés qui ne sont pas de degré p. Un langage qui restreindrait ses énoncés correctement construits à des énoncés ayant cette propriété d'éliminabilité offrirait évidemment de multiples avantages; mais les règles syntaxiques d'un tel langage seraient probablement fort complexes. De toute manière, les langages naturels n'imposent pas de telles restrictions à la construction des énoncés. Toutefois, la restriction des équivalences de (c) aux énoncés de degré p peut être considérée comme une sorte de substitut des restrictions de nature syntaxique auxquelles nous faisons allusion. Que les équivalences de (c) ne soient pas valables pour certains énoncés, résulte simplement de la souplesse des règles syntaxiques d'un langage naturel, règles que l'on ne pourrait d'ailleurs pas remplacer par de plus sévères sans difficulté.