ÉTUDE SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

A. ERRERA

Chapitre I

INTRODUCTION ET TEXTE

Nos loisirs forcés (de septembre 1943 à septembre 1944) nous ont permis de relire les *Grundlagen der Mathematik* d'HILBERT et BERNAYS, dont le 1er tome a paru en 1934 (1); nous désignerons dorénavant par HB cet ouvrage. En voici le premier paragraphe, que nous ferons suivre des remarques et des commentaires que sa lecture nous a suggérés. L'importance historique d'une pareille «Somme» en justifierait, à nos yeux, une traduction française complète, même aussi tardive.

Nous avions fait cette traduction, aussi fidèle que possible, du § 1 d'HB, condensant toutefois certains passages, lorsque la pensée des auteurs nous paraissait assez clairement reproduite; mais on nous a fait remarquer que, même ainsi, le texte était trop long pour la présente publication; aussi en donnons-nous un abrégé, en priant le lecteur, pour plus de détails, de se référer au texte allemand.

Nous intercalons entre crochets, [ ], de courtes explications, des synonymies ou des indications utiles et même des mots allemands que nos termes ne traduisent pas assez exactement à notre gré. Nos remarques plus importantes seront réunies dans le commentaire (notre chapitre II). Ceux qui connaissent l'ouvrage peuvent sauter notre premier chapitre.

HB apporte à la théorie des fondements des mathématiques, la contribution d'idées originales, auxquelles HILBERT était parvenu au cours d'un tiers de siècle de réflexions, après qu'il eût publié, en 1899, la première édition des célèbres *Fondements de la Géométrie* [*Grundlagen der Geometrie* (2)] et en 1900, sa note *Sur la Notion de Nombre,* d'ailleurs écrite l'année précédente.

(1) Chez Springer à Berlin. Le 2me volume est de 1939. A notre connaissance, ce livre n'a pas été traduit.

(2) Cet ouvrage très connu fut écrit pour l'inauguration du monument de GAUSS et WEBER à Goettingue. La 7e édition parut en 1930, chez Teubner. Il est regrettable que la traduction française de LAUGEL, faite d'après la 1ère édition, n'ait pas été mise à jour. En anglais, il en existe une par E. TOWNSEND; 2e édit., Chicago, Open Court Publishing Co., 1910. *Über den Zahlbegriff* est donné dans le *Jahresbericht d. D. M. V.*, t. VIII, fasc. 1, Teubner, à Leipzig, en 1900; reproduit en annexe VI des *Grundlagen d. Geom.*

Nous saisissons cette occasion pour remercier vivement MM. BARZIN, ISSMAN et PERELMAN d'un certain nombre de remarques judicieuses et de suggestions utiles qu'ils ont bien voulu nous faire à la lecture du présent travail et pour nous excuser, que d'autres obligations nous aient empêché de l'achever et de le publier plus rapidement. Nous estimons, cependant, qu'il n'est pas trop tard pour le faire.

*
**

Le problème de la non-contradiction en axiomatique, comme problème logique de la décision (3) [abrégé de HB, § 1]

Pour les fondements des mathématiques, nous suivrons une triple marche:

1) élaboration de la méthode axiomatique, eu égard, en particulier, aux fondements de la géométrie;
2) fondation de l'analyse, selon sa rigueur actuelle, par la réduction de la théorie des grandeurs à celle des nombres et de leurs ensembles;
3) recherches sur les assises de la théorie des nombres et des ensembles.

Par une exigence méthodologique accrue, le problème de l'infini se dégage, issu de l'*axiomatique*, qui peut être prise au sens *large* ou au sens *strict*.

Au sens le plus large, une théorie est axiomatique, lorsque ses notions et hypothèses fondamentales sont énoncées comme telles dès le départ et que le reste s'en déduit logiquement par des définitions ou des démonstrations, comme dans la géométrie d'EUCLIDE, la mécanique de NEWTON ou la thermodynamique de CLAUSIUS.

L'axiomatique s'accentue dans les Grundlagen d'HILBERT, qui ne conservent des premiers matériaux objectifs [sachlich], que la quintessence formulée dans les axiomes et sera la plus stricte, quand elle prendra la forme *existentielle*, opposée à la méthode *constructive* ou génétique (4): dans celle-ci, les objets de la théorie s'introduisaient seulement comme une classe de choses (5), alors que dans celle-là, on a affaire à un ou plusieurs systèmes fixes, constituant d'emblée un *domaine délimité de sujets* [ou arguments] pour les *prédicats* qui composent les propositions.

Exception faite du cas trivial d'une collection finie, l'acceptation de la

(3) Nous pensons qu'il eût mieux valu traduire «Entscheidung» par le mot peu usité de «tranchement», qui ne peut donc prêter à aucune confusion; le terme «décision», nous paraît vague et faible.

(4) Cf. pour cete opposition, *Über den Zahlbegriff*, v. (2).

(5) BROUWER et son école emploient le mot «species», c'est-à-dire ici, *espèce*.

totalité du *domaine d'individus* devra d'ailleurs se couvrir d'une *hypothèse d'idéalisation* [ou d'abstraction], qui s'agrégera aux hypothèses des axiomes.

Ainsi, l'axiomatique renforcée ou *formelle*, celle des Grundlagen, s'obtient en s'abstrayant du contenu matériel par cette présentation existentielle et rend indispensable une *démonstration de non-contradiction*; en revanche, l'axiomatique *substantielle* ramenait ses notions propres à des expériences vécues, exprimait ses propositions fondamentales comme des faits *évidents* issus de notre expérience et faisait naître la croyance, confirmée par le succès d'une telle théorie, qu'on était sur la trace de lois naturelles.

Tant pour établir ses déductions que pour prouver sa non-contradiction, l'axiomatique formelle exige, elle aussi, certaines *évidences*; mais celles-ci ne reposent plus sur notre connaissance particulière des faits considérés [jeweilig]: elle est une et la même pour toute axiomatique quelle qu'elle soit et constitue notre moyen primordial de connaissance, condition préalable à toute recherche théorique exacte.

L'axiomatique formelle s'appuie sur la substantielle, dont elle est le complément, car celle-ci conduit au choix des formalismes et montre comment les appliquer à des domaines de la réalité.

Cependant, on ne peut s'en tenir à cette dernière, parce qu'en science, on a surtout affaire à des théories qui, sans reproduire exactement les faits, en décrivent une *idéalisation simplificatrice*, d'où elles tirent leur signification.

Elles ne vont nullement se fonder sur un appel ni à l'évidence de leurs axiomes ni à l'expérience; au contraire, elles ne le peuvent que dans le sens où l'idéalisation qu'elles font naître, autrement dit leurs extrapolations, apparaissent comme exemptes de contradictions; par ces extrapolations, la formation de concepts et les propositions fondamentales des théories dépassent ce que peuvent atteindre, soit l'évidence intuitive [anschaulich], soit les données de l'expérience.

Mais pour reconnaître cette non-contradiction, il ne nous sert de rien de nous référer à la validité approximative des propositions fondamentales, une contradiction pouvant naître précisément du fait qu'on accepte comme strictement valable, une relation qui ne le serait qu'avec des restrictions. Et forcés d'examiner la non-contradiction de systèmes théoriques détachés de toute considération du domaine des faits, nous voilà plongés dans l'axiomatique formelle.

Jusqu'ici, aussi bien en géométrie qu'en physique, ce problème a été traité par l'*arithmétisation*; on représente les objets par des nombres ou des systèmes de nombres et les relations fondamentales, par des équations ou des inégalités, de sorte que les axiomes de la théorie se transposent, soit en identités arithmétiques ou en théorèmes démontrables, comme en géométrie, soit, comme en physique, en un système de conditions, dont la compatibilité s'établit par des théorèmes d'existence. Pour employer ces procédés, il faut donc accepter d'abord la validité de l'arithmétique et de l'analyse (nombres réels) et nous interroger sur la nature de cette validité.

Mais d'abord, tâchons d'attaquer directement le problème de la non-contradiction, en étudiant sa structure et en nous familiarisant un peu avec la *logique symbolique*; celle-ci s'avère très utile pour notre but et HB va l'envisager en détail.

Comme exemple d'une axiomatique, les auteurs prennent une géométrie plane simplifiée, restreinte aux axiomes de situation appelés, dans les Grundlagen, axiomes de *liaison* et d'*ordre* et à celui des *parallèles* [le postulatum d'EUCLIDE]. Ceci conduit à les modifier légèrement, car seuls les points et non les droites seront pris comme individus.

La notation Gr(x,y,z), exemple d'un prédicat *ternaire* [à trois arguments] veut dire que les trois points x,y,z sont collinéaires; de même Zw(x,y,z), que x se trouve entre y et z (6).

Parmi les axiomes prend place une notion logique, l'*identité* de x et y, écrite $x = y$.

On a besoin également, pour les noter, de deux signes logiques [les *quantificateurs*]: celui d'*universalité*, (x), «pour tous les x», et celui d'*existence*, (Ex), «il existe un x tel que» (7). La variable qui dépend d'un tel signe est *liée*, à la manière d'une variable d'intégration, de façon que la proposition complète ne dépend pas d'une de ses valeurs particulières.

Il faut également le signe de *négation* d'une proposition, qui se marque en la surlignant (au lieu de $\overline{x=y}$, on écrit $x \neq y$); celui de *conjonction* (ou produit logique), & (lire: *et*) placé entre deux propositions, pour indiquer qu'elles sont valables l'une et l'autre; et celui de *disjonction* (ou somme logique) de deux propositions, $\vee$ (lire: *ou*, en latin *vel*), l'une au moins étant valable sans exclusion de l'autre. Le signe $\rightarrow$ d'*implication* veut dire que la seconde proposition vaut, si la première vaut; une implication est donc fausse dans le *seul* cas, où la première est vraie et la seconde fausse.

Des combinaisons de pareils symboles permettent de représenter des propositions hypothétiques générales (8). On relie des parties de formules par des parenthèses, dont certaines peuvent être évitées par des conventions de

(6) Le procédé de prendre pour seuls individus, les points, a été poussé à fond, particulièrement dans l'admirable axiomatique d'Oswald VEBLEN: *A system...*, Trans. Am. Math. Soc, t. V (1904), pp. 343-384 où, de plus, toutes les relations géométriques sont définies grâce à la notion «entre».

Nous conservons la notation d'HB, où Gr et Zw représentent les mots *Gerade* et *Zwischen*, car changer de symboles rendrait plus difficile le recours au texte original.

(7) Aujourd'hui, (x) tend à être remplacé par $(\forall x)$ et (Ex) par $(\exists x)$. Il y a près d'un demi-siècle, TOEPLITZ mettait $\frown{x}$ et $\underset{\smile}{x}$ pour (x) et (Ex) respectivement; ces signes étaient peu pratiques pour l'impression; mais ils avaient des qualités de symétrie. Nous continuerons à utiliser autant que possible les notations d'HB, (x) et (Ex).

(8) HB reprendra, dans son § 3, le rapport entre, d'une part la disjonction et l'implication ici définies et d'autre part, les liaisons de propositions disjonctives et hypothétiques au sens usuel.

préséance, $\rightarrow$ l'emportant sur & et $\vee$; & sur $\vee$; et ces trois signes, sur les quantificateurs; ou même, s'il n'y a pas d'ambiguïté, par l'omission des parenthèses.

Fort de ces symboles, HB transcrit en Gr et Zw, les axiomes de la géométrie considérée ici, en les faisant correspondre à ceux des Grundlagen (9). Pour cela, l'axiome des parallèles s'énonce: «A toute droite et par un point extérieur, il existe toujours [dans leur plan] une et une seule droite non sécante à celle-là» (10); afin de l'abréger, la notation Par(x,y;u,v) voudra dire: «Il n'existe aucun point en ligne droite avec x,y en même temps qu'avec u,v», notation qui permet de représenter aisément le postulatum.

Les axiomes étant énumérés l'un après l'autre et reliés par des &, nous obtenons une *formule logique* unique, $\mathfrak{A}$(Gr,Zw) qui représente une proposition concernant les prédicats Gr et Zw.

De la même façon, nous pouvons figurer un théorème de géométrie plane par la formule $\mathfrak{S}$(Gr,Zw), s'il ne concerne que des relations de situation et d'ordre.

Cette écriture évoque encore l'axiomatique substantielle, où les relations fondamentales [«droite» et «entre»] correspondent à des objets de notre représentation sensible, à contenu déterminé et dont les propositions expriment des énoncés.

En revanche, en axiomatique formelle, les relations fondamentales n'ont pas d'abord ce contenu; au contraire, leur détermination, d'ailleurs implicite, viendra des seuls axiomes; et l'on ne pourra donc, dans une théorie axiomatique, en utiliser que ce qu'ils formulent explicitement.

Des termes tels que «se trouve sur» ou «entre», sont uniquement une concession à l'usage, destinée à faciliter la liaison de la théorie aux faits intuitifs. En réalité, les relations fondamentales vont jouer le rôle de *prédicats variables,* simples, binaires, ternaires, ..., selon le nombre de leurs arguments. Donc, dans l'exemple, il y a deux prédicats ternaires du type R, S, plus exactement R(x,y,z), S(x,y,z).

Notre système d'axiomes consiste en une condition imposée à ces prédicats et s'exprime donc par la formule logique, $\mathfrak{A}$(R,S), obtenue en substituant R(x,y,z) à Gr(x,y,z) et S(x,y,z) à Zw(x,y,z) dans $\mathfrak{A}$(Gr,Zw).

La relation d'identité $x=y$ apparaît aussi dans $\mathfrak{A}$(R,S) ; elle tire sa signification de son contenu. Ceci n'est pas en opposition avec notre point de vue méthodologique; car la détermination, par son contenu, de l'identité, qui n'est d'ailleurs pas à proprement parler une relation (11), n'est pas empruntée aux faits étudiés, mais sert uniquement à trier les individus; et il faut la tenir pour donnée, dès qu'on pose leur domaine comme point de départ.

(9) Toutes ces indications sont spécialement destinées à ceux qui connaissent cet ouvrage fondamental, v. (2).

(10) V. (2), p. 83.

(11) «die im eigentlichen Sinne überhaupt gar keine Beziehung ist» (HB, p. 7).

C'est dans ce sens que correspond, à un théorème de la forme $\mathfrak{S}(Gr,Zw)$, l'affirmation de nature logique, que n'importe quels prédicats R,S qui satisfont à $\mathfrak{A}(R,S)$, répondent aussi à $\mathfrak{S}(R,S)$; donc que, pour tout couple de prédicats $R(x,y,z)$ et $S(x,y,z)$, la formule $\mathfrak{A}(R,S) \rightarrow \mathfrak{S}(R,S)$ est une *proposition vraie*. Cela traduit un théorème de géométrie en la seule logique des prédicats.

C'est de la même manière, que la question de la non-contradiction se présente comme un problème de cette logique. En effet, il s'agira de voir si deux prédicats, R et S, peuvent satisfaire aux conditions subsumées par $\mathfrak{A}(R,S)$ (12) ou si, au contraire, l'hypothèse que deux prédicats particuliers y satisfont, conduit à une contradiction; dans ce dernier cas, la proposition correcte sera $\overline{\mathfrak{A}(R,S)}$, quels que soient les prédicats R et S.

Une question comme celle-ci tombe sous la rubrique des *problèmes de la décision* [cf. (3)]. On entend par là, en logique nouvelle, la recherche de méthodes générales pour trancher, soit de la *validité universelle*, soit de la *réalisabilité* (13) de formules logiques (14).

Il s'agit donc de l'analyse de formules composées de signes logiques, de variables-prédicats et d'équations, sans parler des variables-individus, arguments des prédicats et liées par des quantificateurs.

Pareille formule est universelle, lorsqu'elle exprime une proposition vraie pour *toute* détermination des prédicats variables; et elle sera dite réalisable [ou «satisfactible»], lorsqu'il en est ainsi pour une détermination *convenable* de ces prédicats. HB donne des exemples des deux cas.

Dans de telles formules, en même temps qu'on détermine les prédicats, on doit fixer le *domaine des individus* [leurs arguments], auquel appartiennent les variables x,y,z... Il se présente, dans la formule logique, comme une *variable cachée*; et sans doute, la formule se comporte-t-elle de façon invariante quant à sa vérification [sa réalisabilité], devant les transformations biunivoques et réciproques de ce domaine en un autre, car les individus n'apparaissent que comme arguments [ou paramètres] variables, en sorte que le seul caractère essentiel du domaine des individus est leur nombre.

Nous avons par conséquent à distinguer les questions suivantes, concernant la validité universelle et la réalisabilité:

1°) validité universelle pour chaque domaine d'individus, c'est-à-dire réalisabilité pour *n'importe* quel domaine;

2°) universalité ou réalisabilité pour un nombre *donné* d'individus;

(12) La présente forme, encore peu nette, de la question, sera précisée plus tard par HB.

(13) Si le mot «satisfactibilité» existait en français, il serait ici à sa place; quant au mot «compatibilité», il ne dit pas clairement, qu'il s'agit de celle qu'établit la présentation d'un *modèle* satisfaisant à la formule.

(14) Cette explication ne concorde qu'avec le problème de la décision au sens étroit. Nous n'avons pas besoin, dans le présent cadre, de nous occuper de son sens élargi.

3°) *nombres* des individus, pour lesquels il y a universalité ou réalisabilité. *Remarque*: HB admet d'emblée la *convention* d'exclure, une fois pour toutes, le cas où le nombre d'individus d'un domaine est zéro, parce que les domaines *vides* occupent formellement une situation exceptionnelle et que, d'ailleurs, leur étude est triviale et sans valeur pour les applications ([15]).

En outre, il faut considérer que, pour la détermination d'un prédicat, seul importe le *barême* de ses valeurs ([16]), c'est-à-dire le tableau où sont énumérées les valeurs des variables-sujets, pour lesquelles le prédicat vaut ou ne vaut pas (est «vrai» ou est «faux»).

Cette circonstance a pour conséquence que, si les individus sont en nombre *fini donné*, l'universalité ou la réalisabilité d'une formule logique proposée prend un caractère purement *combinatoire*, qu'on peut déterminer au moyen d'un *criblage* de tous les cas par des moyens élémentaires. Par exemple, s'il y a n individus pour un prédicat à k arguments, il y aura n^k systèmes de valeurs des variables; et comme, pour chacun de ceux-ci, le prédicat est vrai ou faux, cela fera 2^{n^k} barêmes possibles. Et les auteurs généralisent ceci au cas où il y a t variables-prédicats.

Comme on peut énumérer tous les systèmes de prédicats et qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs pour les variables liées par les quantificateurs, alors une formule sera universelle, si elle est vraie pour chacun de ces systèmes en nombre fini, et réalisable, si elle l'est pour l'un au moins d'entre eux. Autrement dit, «tous» équivaut à une conjonction et «il existe» à une disjonction; c'est ce que les auteurs montrent par des exemples, qui soulignent le caractère combinatoire du problème de la décision, lorsque le nombre des individus est fini et donné. De ce caractère il résulte alors, que l'universalité d'une formule $\mathfrak{F}$ et la non-réalisabilité de $\overline{\mathfrak{F}}$ sont synonymes; de même, la réalisabilité de $\mathfrak{F}$ et la non-universalité de $\overline{\mathfrak{F}}$.

Revenons maintenant au problème de la non-contradiction d'un système d'axiomes, que nous supposons écrits en symboles et subsumés par une seule formule. La réalisabilité de celle-ci pourra [théoriquement] être décidée par criblage (quand les individus sont en nombre fini et donné); et si elle est réalisable, on aura démontré ainsi la non-contradiction des axiomes, par

([15]) Cette règle, d'après laquelle un domaine d'individus doit comporter un objet au moins, de sorte qu'un jugement universel vrai doit s'appliquer à au moins un objet, ne doit pas se confondre avec la convention imposée par la logique d'Aristote, qu'un jugement de la forme «tous les S sont P» ne vaut que s'il existe des objets ayant la propriété S, convention abandonnée en logique moderne; un tel jugement s'écrit symboliquement $(x)\ (S(x) \rightarrow P(x))$ et vaut [aujourd'hui] pour vrai, lorsqu'un objet x, dès qu'il possède la propriété $S(x)$, a la propriété $P(x)$, indépendamment du fait qu'il y ait ou non des objets satisfaisant à $S(x)$. HB reparlera de ceci à l'occasion de la construction déductive de la logique des prédicats (cf. son § 4, pp. 106-107).

([16]) «Wertverlauf», comme le tableau de définition d'une fonction au sens de Lejeune-Dirichlet.

la constatation qu'un domaine fini d'individus et les barêmes des prédicats choisis constituent un modèle pour ainsi dire concret, faisant voir cette réalisabilité.

Les auteurs empruntent à VEBLEN [loc.cit. ([6]), p. 350], l'exemple d'un système d'axiomes de géométrie, auquel on peut satisfaire par un modèle formé de *cinq* points [donc le domaine n'est pas vide]; ces axiomes sont une modification et une simplification de ceux déjà cités:

On détermine le prédicat Gr, de manière qu'il soit vrai pour chaque triade de points, d'où il résulte que, dans le modèle, *les cinq points sont en ligne droite*. On vérifie ensuite que tous les axiomes sont satisfaits par les cinq points, celui des parallèles étant vérifié *à vide*, puisque l'hypothèse d'un point pris en dehors de la droite est fausse dans chaque combinaison.

On s'assure ainsi par criblage que, dans le modèle, toutes les exigences des axiomes se vérifient. De cette façon, c'est par la méthode du modèle que le système d'axiomes apparaît comme cohérent.

Appliquée dans les recherches axiomatiques récentes, cette méthode sert ici surtout aux *démonstrations d'indépendance*. Celle d'une proposition $\mathfrak{S}$ par rapport à un système d'axiomes $\mathfrak{A}$, équivaut selon HB, à la compatibilité du système d'axiomes $\mathfrak{A}$ & $\overline{\mathfrak{S}}$ obtenu en adjoignant à $\mathfrak{A}$, comme nouvel axiome, la négation de $\mathfrak{S}$ ([17]). Il arrive qu'une telle compatibilité puisse s'établir par un modèle pris dans un domaine fini d'individus; HB en donne divers exemples.

Cette méthode du modèle apparaît ainsi comme un complément opportun de celle des déductions successives, en ce sens que, partant de certains axiomes, c'est par celles-ci qu'on établit que des propositions sont démontrables et par des modèles [de contre-exemples], qu'elle sont indémontrables.

Maintenant, la question se pose: la méthode du modèle est-elle applicable aux domaines *infinis* d'individus ? On ne saurait encore y répondre, bien qu'évidemment, pour ceux-ci, les systèmes possibles de prédicats ne forment plus une multiplicité qu'on puisse embrasser d'un seul coup d'œil ou dont on puisse passer au crible tous les barêmes. Toutefois, l'exemple qui suit montre qu'on peut satisfaire aux trois axiomes que voici par le modèle d'un seul prédicat [le nombre des individus étant illimité]:

1°) $\overline{(x)R(x,x)}$;

2°) $(x)(y)(z)\ (R(x,y)\ \&\ R(y,z) \rightarrow R(x,z))$;

3°) $(x)(Ey)R(x,y)$.

Ces axiomes signifient qu'en partant d'un individu, a, du domaine [supposé non vide], il existera un b, tel que R(a,b) soit vrai; a et b sont distincts en vertu du 1°. Partant de b, on trouvera un nouvel individu, c, distinct des précédents et ainsi de suite, par un raisonnement qui ne peut s'arrêter.

([17]) On peut soutenir que lorsque $\overline{\mathfrak{S}}$ est une conséquence de $\mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{S}$ n'est pas indépendant de $\mathfrak{A}$, mais faux si l'on accepte $\mathfrak{A}$; et alors on dira que $\mathfrak{S}$ n'est indépendant de $\mathfrak{A}$, que si *chacun* des systèmes $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{S}$ ainsi que $\mathfrak{A}$ & $\overline{\mathfrak{S}}$ est compatible; car dans ce cas, on ne pourra tirer de $\mathfrak{A}$ ni $\mathfrak{S}$ ni $\overline{\mathfrak{S}}$. Mais ceci est plutôt question de terminologie.

Un domaine fini d'individus ne saurait donc satisfaire aux axiomes. En revanche, nous pouvons aisément fournir le modèle d'un domaine infini: prenons, pour individus, les nombres entiers et pour [le prédicat] R(x,y), la relation « x est inférieur à y»; et les trois axiomes sont satisfaits.

On remarque, par de tels exemples, que la non-contradiction des axiomes considérés n'est nullement résolue par le modèle, mais seulement ramenée à celle d'une arithmétique, où les entiers sont considérés comme formant une classe achevée.

Cette dernière supposition est familière à tout le monde; cependant, FREGE a montré pour quelles raisons elle devait être assurée par une démonstration de non-contradiction. Dans son esprit, celle-ci n'était pas une preuve d'existence; pourtant, il croyait trouver un autre modèle dans la classe de tous les prédicats simples qu'on puisse imaginer ([18]). Mais, selon HB, cette dernière supposition, suspecte à tout esprit impartial, s'est montrée insoutenable, à cause des célèbres paradoxes de la logique et de la théorie des ensembles, découverts par RUSSELL et ZERMELO.

Toutefois, c'est l'échec de l'entreprise de FREGE qui a mis en vive lumière le problème posé par l'acceptation d'une totalité de la suite des entiers.

On pourrait être tenté de chercher pour modèle, un domaine infini emprunté à la perception sensible ou même à la réalité concrète. Celles-ci n'en peuvent cependant fournir un, que par une extrapolation mentale demandant tout autant de justification que l'ensemble des entiers. HB donne, comme exemple typique, le célèbre paradoxe de ZÉNON, d'après lequel, en un temps fini, se présentent une infinité d'événements, tels que le parcours de la moitié, puis du quart, du huitième, etc. Et pour un mouvement réel, ces parcours constituent une succession de processus réels.

D'après nos auteurs, la réfutation classique du paradoxe par la convergence de la somme des temps employés, néglige l'essentiel, savoir l'antinomie d'une succession illimitée dont, *ni en réalité, ni même en principe,* notre esprit ne peut effectuer l'achèvement, et d'une réalité, où elle se présenterait comme achevée.

Aussi, leur réponse est-elle bien plus radicale, en déniant toute signification physique à notre représentation spatio-temporelle du mouvement pour des distances ou des temps aussi petits qu'on veut et en admettant que le modèle mathématique du mouvement extrapole vers l'intérieur, l'ordre de grandeur des faits observables et cela, au sens d'une pure création de concepts [Begriffsbildung], de même, disent-ils, qu'en mécanique des fluides, on remplit de matière un continu spatial; et cependant, pas plus que de l'eau divisée à l'infini ne donne de l'eau, du mouvement divisé à l'infini ne garde le caractère d'un mouvement. Cela concédé, le paradoxe s'évanouit.

([18]) Gottlob FREGE, *Grundlagen der Arithmetik,* Breslau, 1884, et *Grundgesetze der Arithmetik,* Jena, 1893. Les passages de FREGE auxquels HB fait allusion ne sont pas précisés. Quant aux prédicats auxquels on puisse penser, ils diffèrent évidemment d'une personne à l'autre.

Néanmoins, le modèle mathématique du mouvement conserve une valeur durable, en engendrant des concepts d'idéalisation destinés à simplifier notre représentation. Pour cela, outre une approximative concordance avec les faits, il doit de plus remplir la condition que l'extrapolation créée soit, elle aussi, exempte de contradiction interne. De ce point de vue, ce paradoxe n'ébranle nullement notre notion mathématique du mouvement; et l'argument qu'on vient de lui opposer retient son entière valeur à cet égard. Mais c'est une tout autre affaire de savoir, si nous avons là une vraie preuve de la non-contradiction d'une théorie mathématique du mouvement. Celle-ci repose essentiellement sur celle du continu et cette dernière, en fin de compte, sur la représentation de l'ensemble des entiers comme classe achevée. Par de tels détours, nous voilà revenus à la question que nous voulions éluder par le rappel des faits du mouvement.

Il en va de même, chaque fois qu'on s'imagine indiquer une infinité comme donnée par l'expérience ou par l'intuition, par exemple, celle de la gamme prolongée à l'infini d'octave en octave ou de la multiplicité continue, infinie, des couleurs obtenue en passant d'une teinte à une autre. A y regarder de plus près, on voit maintenant qu'aucune infinité ne nous est jamais donnée ici, mais est interpolée ou extrapolée par des démarches mentales.

Ces réflexions nous permettent de comprendre qu'on ne tranchera pas la question de l'existence de multiplicités infinies par un appel à des objets extra-mathématiques et qu'on devra la résoudre à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes. Mais présenter une infinité d'individus, n'est-ce pas demander l'impossible ?

Un domaine infini ne se caractérisera que par sa structure, c'est-à-dire par des relations entre ses éléments, autrement dit par la preuve qu'il satisfait à certaines relations formelles. Donc l'existence d'un domaine infini d'individus *ne peut se concevoir autrement que comme satisfaisant à certaines formules logiques*; or celles-ci sont de la même nature que celles qui nous ont amenés à la question de l'existence d'un domaine infini et dont la réalisabilité devait précisément être établie par la présentation du domaine infini. Par conséquent, vouloir appliquer la méthode du modèle à ce genre de formules, nous conduit à un cercle vicieux.

Cependant, ce modèle ne devait servir qu'à prouver la cohérence des axiomes; et nous y avons été conduits par les domaines finis, pour lesquels la non-contradiction d'une formule équivaut à la possibilité d'y satisfaire.

Dans le cas des domaines infinis, la situation s'est compliquée: s'il est exact qu'un système d'axiomes, représenté par la formule $\mathfrak{A}$, est contradictoire, si et seulement si la formule $\overline{\mathfrak{A}}$ est universellement valable, nous n'avons plus maintenant sous les yeux, pour les prédicats variables, une provision *donnée* de barêmes et nous ne pouvons plus conclure, lorsque $\overline{\mathfrak{A}}$ n'est pas universellement valable, qu'un modèle soit *eo ipso* à notre disposition pour satisfaire au système $\mathfrak{A}$.

Aussi, lorsqu'il s'agit d'un domaine infini d'individus, si le pouvoir de satisfaire à un système d'axiomes est une condition *suffisante* de sa non-contradiction, il n'est nullement prouvé qu'il en soit une condition *néces-*

saire. Et nous ne pouvons plus nous attendre, en général, à voir une démonstration de non-contradiction fondée sur un modèle.

Toutefois, rien ne nous oblige maintenant à l'établir par ce moyen, car nous pouvons nous en tenir à la signification originelle négative de la non-contradiction. Représentons, en effet, par $\mathfrak{A}$, le système d'axiomes; il nous suffirait de prouver, que satisfaire à la formule $\mathfrak{A}$ par certains prédicats ne peut mener à aucune contradiction logique.

Cette façon d'attaquer le problème nous conduit à prendre une vue d'ensemble des déductions logiques possibles qu'on peut tirer d'un système d'axiomes. Et la méthode qui s'offre à nous, sera celle de la *formalisation de la déduction logique*, élaborée par Frege, Schröder, Peano et Russell. Il faut donc

1°) *formaliser* rigoureusement les principes de cette déduction et les traduire en un système de règles qu'on puisse embrasser complètement du regard;

2°) pour un système proposé, $\mathfrak{A}$, d'axiomes dont on veut prouver la cohérence, *montrer qu'en partant de* $\mathfrak{A}$, *aucune contradiction ne peut être engendrée par des déductions logiques*, c'est-à-dire qu'on ne saurait tirer de $\mathfrak{A}$, deux formules dont l'une soit la négation de l'autre.

Mais rien ne nous force à refaire cette démonstration, séparément, pour chaque système d'axiomes; car nous disposons de la méthode d'arithmétisation rappelée au début de cette étude. Celle-ci revient maintenant à chercher un système, $\mathfrak{A}$, d'axiomes, d'une structure si transparente, que nous puissions en prouver la non-contradiction (au sens du 2°); et cependant assez féconde, pour qu'en supposant *donné*, pour ces axiomes, un modèle $\mathfrak{S}$ d'objets et de relations, on en puisse tirer des modèles vérifiant des systèmes, tels que $\mathfrak{B}$, d'axiomes de la géométrie ou de la physique, et cela en prenant pour objets de $\mathfrak{B}$, des individus ou des complexes d'individus tirés de $\mathfrak{S}$ et pour relations fondamentales, des prédicats déductibles par des opérations logiques, des relations fondamentales de $\mathfrak{S}$.

Ainsi, la cohérence de $\mathfrak{B}$ découlera de celle de $\mathfrak{A}$, admise par hypothèse. Or, pour un tel système, $\mathfrak{A}$, l'on possède, selon HB, l'arithmétique construite axiomatiquement.

Cette méthode de réduction de théories axiomatiques à l'arithmétique ne demande plus du tout que celle-ci constitue un inventaire de faits [Tatbestand] intuitivement représentable; bien plus, pour notre propos, il n'est pas besoin qu'elle soit autre chose qu'un édifice d'idées, *dont nous puissions démontrer la non-contradiction* ([19]) et qui fournisse un cadre systématique, dans lequel nous sachions insérer les systèmes d'axiomes des sciences théoriques, de telle manière que les idéalisations qu'on y effectue de leurs données réelles soient, elles aussi, démontrées cohérentes par cette insertion.

Résumons brièvement, avec HB, les résultats de cette étude: Le problème de satisfaire à un ensemble d'axiomes (ou encore à une

([19]) C'est nous qui soulignons.

formule logique), problème susceptible d'une solution positive, par un modèle, lorsque le domaine des individus est fini, ne l'est plus par cette méthode au cas où, pour satisfaire aux axiomes, seul un domaine infini d'individus entre en ligne de compte; et cela, parce que l'existence de tels domaines ne peut pas passer pour achevée et que, bien plus, leur introduction ne sera justifiée, que par une démonstration de la non-contradiction d'un système d'axiomes caractérisant l'infini.

Devant l'échec de cette méthode positive de décision, la seule voie qui nous reste est de prouver, par la négative, la non-contradiction, à savoir comme une *démonstration d'impossibilité,* ce qui exige de formaliser le raisonnement logique.

Dans nos tentatives d'aborder une telle démonstration, nous devons garder clairement à l'esprit, qu'elle ne peut plus être conduite par la méthode de la déduction axiomatique existentielle. Bien plus, nous avons le droit d'appliquer seulement des raisonnements exempts d'hypothèses d'existence abstraite [idealisierend].

Forts de ces considérations, il se présente immédiatement à nous la pensée que voici: Si nous étions en mesure de conduire la démonstration de non-contradiction sans faire d'hypothèse axiomatique d'existence, ne serait-il pas également possible de fonder directement, par ce même moyen, toute l'arithmétique et de rendre ainsi cette démonstration tout à fait superflue ? La réponse à cette question sera en partie affirmative, en partie négative.

Celle-ci sera étudiée par HB dans son second paragraphe; mais il mais il nous paraît opportun de discuter d'abord les points que nous venons d'exposer.

Chapitre II

REMARQUES ET COMMENTAIRES SUR LE § 1 D'HB

§ 1.- *Sur la notion d'évidence*

La mathématique est un langage qui a demandé une longue et patiente élaboration. Or si l'on conçoit, à la rigueur, de la pensée sans langage (comme il existe, hélas, aussi du langage sans pensée !) ce sera une pensée plus ou moins confuse, courte et qui ne s'écartera guère du monde des sensations ou des expériences les plus simples de la vie; ainsi paraît être celle des animaux, même les plus intelligents; ou de certains êtres humains comparables aux enfants-loups sauvés de la jungle ([20]).

Pour édifier et communiquer une pensée plus fouillée et plus précise, il faut, non seulement un langage, mais qu'il soit bien affûté; et cela est vrai surtout du langage scientifique. Au fur et à mesure que la pensée se développe, allant du vague à l'exact, du particulier au général et du concret à l'abstrait, le parler devient plus net, plus nuancé, en même temps que plus étendu. Probablement y a-t-il, d'ailleurs, une action progressive réciproque de la pensée et de la parole.

On peut se demander, entre mille problèmes que pose le langage, quelle est la nature du sentiment d'*évidence* qu'inspirent certaines propositions: pourquoi nous convainquent-elles, en nous dispensant, du moins jusqu'à nouvel ordre, d'une preuve supplémentaire ?

A cette question, dès le début de leur étude, nos auteurs répondent indirectement et expliquent qu'il y a, selon eux, deux sortes d'évidences qui s'appuient, l'une, sur notre expérience des faits de la nature et notre connaissance particulière à chaque domaine considéré, l'autre, sur les objets mêmes de la pensée; celle-ci serait primitive et tout à fait générale.

Cette classification correspond à peu près à celle qu'on admet souvent, d'après laquelle il y a l'évidence que nous donne la perception immédiate des faits naturels et qu'on peut nommer évidence réelle ou *sensorielle* et celle que nous apportent les lois du langage employé, autrement dit, l'évidence *formelle*; on appelle parfois celle-ci, l'évidence *logique*.

Des exemples de la première seraient notre certitude qu'il y a une chaise lorsque nous nous y asseyons, ou celle d'avoir devant nous une fleur que nous pouvons toucher, voir et sentir, Leonard de Vinci disait déjà: «L'expérience est la seule certitude». Nous pourrions même, ainsi que nous le fait remarquer M. Perelman, distinguer des degrés d'évidence, selon les critères acceptés pour nous convaincre.

Pour l'évidence formelle, l'exemple le plus typique est celui du *principe de contradiction*: une proposition ne peut pas être en même temps vraie et fausse. Ce genre de règle correspond, en somme, à des faits observés: si l'on constate la présence de la chaise, on ne peut,

([20]) Leur authenticité a cependant été contestée; mais ceci nous éloigne du sujet, comme le feraient divers succédanés du langage articulé, tels que la danse des abeilles. Sur les rapports entre «le langage et la pensée», on lira avec grand intérêt un livre, paru sous ce titre, par M. P. Chauchard, en 1956, aux Presses Universitaires de France. Nous sommes heureux d'avoir trouvé plusieurs de ses affirmations que les nôtres corroboraient pleinement.

en même temps, s'apercevoir de son absence. Bien entendu, la seule sensation immédiate est celle de sa présence éventuelle et non de la fausseté de cette absence. Mais dès que nous en parlons, nous identifions ces expressions.

Cette identification correspond à une élaboration lente de notre pensée, en rapport avec une élaboration lente de notre parler. C'est ce qui nous amène à dire, qu'en fin de compte, les lois de la logique répondent à des lois d'un langage formalisé, c'est-à-dire à des *constatations,* probablement empiriques à l'origine, sur l'usage de notre parole.

Pour reprendre notre exemple, il ne nous est pas loisible, en même temps, d'affirmer et de nier une proposition, du moins dans un langage cohérent, ce que l'on exprime par les mots classiques: «il est faux que p et non-p», en formule, $\overline{p \,\&\, \bar{p}}$; de surcroît, cette dernière proposition nous apparaît comme vraie, quelle que soit la proposition p , vraie ou même fausse, que nous y insérons. Accepter le contraire dans un seul cas, entraînerait l'impossibilité de plus rien affirmer et, par conséquent, de parler «logiquement» à nos semblables; ce serait l'écroulement du langage cohérent. Et s'il y a des gens qui se contredisent, c'est à eux seuls que nous nous en prenons et pas à la logique elle-même.

C'est pourquoi nous formulons de pareilles constatations comme *lois logiques*; et le principe de contradiction est la plus impérieuse parmi elles.

D'après nous, ce n'est donc pas, comme HB l'affirme, sur les objets de la pensée que repose l'évidence formelle, mais sur les propositions que nous énonçons et sur notre manière de les relier entre elles. Quant à la considérer comme primitive, ce qualificatif est beaucoup moins précis qu'il n'en a l'air et il serait oiseux de le discuter.

Nous voilà donc conduits à remarquer, qu'aussitôt que nous exprimons ce que nous sentons, nous sommes contraints par les règles de notre parler. Et comme les langages sont nombreux, un choix nous est imposé. C'est aussi pourquoi la frontière entre le sensoriel et le formel est probablement moins nette qu'HB ne le suppose.

Toutefois, si l'on peut imaginer des intuitions confuses indépendantes du langage articulé, même des intuitions liées, comme elles le sont, peut-être, dans les réflexes conditionnés des animaux, il ne saurait, sans lui, y avoir de logique.

On est ensuite tenté d'intercaler, entre ces deux sortes d'évidences, «un extrait des complexes de notre expérience» qui, selon HB, nous fait croire que nous sommes en présence de lois de la nature. Mais ceci est tout autre chose: l'idée même de loi naturelle est le résultat d'un long travail de notre esprit qui nous amène, après d'innombrables constatations, à nous dire que, dans des circonstances identiques, un même ensemble de faits est invariablement suivi d'un même autre ensemble de faits. Nous exprimons aussi cela par les mots: «les mêmes causes ont les mêmes effets», équivalant à admettre implicitement l'invariance de ces lois, ce qui est un énoncé du *déterminisme universel.*

On ne voit du reste pas comment, si l'on rejette celui-ci, même dans un cas particulier, on pourrait avoir confiance dans ses actes, puisqu'à tout moment, une sorte de miracle pourrait venir troubler les suites qu'on en attend. On en serait réduit à implorer le miracle ou à chercher dans un principe d'indétermination comme celui d'Heisenberg, l'explication de ce qu'on ne comprend pas encore.

C'est bien cet extrait des complexes de notre expérience qui nous donne l'illusion de lois naturelles, résultat de certaines inductions impliquant le déterminisme; celui-ci n'est donc lui-même qu'une sorte de quintessence de nos constatations.

Mais alors qu'un fait sensoriel nous apparaît comme directement évident et qu'il en est de même, dans un autre domaine, d'une loi du langage choisi, et bien que de telles évidences excluent, pour ceux qui les ressentent, toute possibilité qu'il en soit autrement, nous ne voyons pas se dégager de cette façon-là, l'évidence de ces fameuses «lois de la nature». Combien de fois, même, au cours des temps, ce qui a paru en être une s'est-il écroulé devant des faits nouveaux, obligeant à reviser la manière de concevoir les choses et à remplacer une ancienne loi par une nouvelle, c'est-à-dire une expression périmée par une autre qui a l'air plus conforme aux faits. Et c'est à tel point, qu'il nous faut parfois un grand effort pour nous expliquer comment, historiquement, on avait bien pu croire que ...

Mais une fois acceptées de telles lois revisables, on raisonnera sur elles, de la même façon que sur des propositions de géométrie; on fera des démonstrations *in abstracto* et l'on n'aura plus affaire, dans les conclusions, qu'à d'autres lois revisables selon les faits et dans la même mesure.

Quant à la certitude que nous apporte la démonstration en elle-même, elle n'a rien à voir avec le déterminisme, puisqu'ici l'on raisonne, non plus sur les faits observés, mais sur les hypothèses qu'on s'est données: une fois admises, ces dernières ne sauraient avoir d'autres conséquences que les théorèmes établis et dont l'évidence n'est qu'un cas particulier de l'évidence logique elle-même.

Pour en revenir au principe de contradiction, il n'est pas un extrait de nos connaissances sensibles, mais l'expression d'une règle du langage, sans laquelle nous ne pourrions nous exprimer d'une façon consistante. Mais à y regarder de près, une telle règle, bien qu'elle ne soit pas à tout instant sujette à revision, a donc probablement, malgré tout, une origine empirique extraordinairement lointaine.

Serait-ce là une explication psychologique des doutes qu'on a émis sur l'une de ces lois, l*e principe du tiers exclu* ([21]) et de l'édification, dans certains travaux modernes, de *logiques multivalentes* ? En vérité, ce sont d'autres langages, que l'on a cherché à substituer à celui qui nous est usuel; du reste, beaucoup d'entre eux se ramènent à une acceptation tronquée de la logique classique, bien qu'on y trouve parfois des règles toutes nouvelles.

L'invention de ces logiques inhabituelles a même fait croire que certains hommes pensent autrement que les autres; il y a près d'un demi-siècle, M. HADAMARD écrivait «...deux mentalités... sont en présence» ([22]). Il nous paraît plus raisonnable de dire seulement, qu'ils veulent parler autrement. L'essentiel est alors de savoir, si leur lanque est plus commode et pourquoi.

Il n'est pas imposible, même, que le langage usuel, qui ne s'est sans doute imposé à nous que par une très longue évolution, creuse des sortes d'ornières mentales, dans lesquelles nos pensées finissent par se glisser sans le vouloir et sans presque être capables d'en sortir, tout en donnant l'illusion d'être conduites par quelque nécessité supérieure.

§ 2.- *Les deux axiomatiques*

La mathématique est, elle aussi, un langage, mais plus spécial, destiné à véhiculer des idées d'un domaine particulier. Dans le temps, elle employait, pour raisonner, des termes parfois mal définis, répondant à des notions peu précises et dont les propriétés étaient douteuses (tel que le principe de continuité). Afin de suppléer à cette lacune, elle faisait, de place en place, appel aux sens et à l'intuition;

([21]) Il reste, bien entendu, le fait aujourd'hui très connu, qu'il y a, en mathématiques, de la marge entre une démonstration d'impossibilité et une existence appuyée sur une construction.

([22]) Il y a dans tout cela et dans ce qui va suivre, plus d'un argument qui rappelle les fameuses polémiques sur le transfini (voir BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions,* 2e éd., 1914, note IV, notamment p. 157). Remarquons que depuis cette époque, beaucoup de notions traitées au cours de ces polémiques ont été notablement clarifiées; la terminologie a, elle aussi, évolué.

c'est pourquoi il ne faut pas trop s'étonner, si certains de ses résultats étaient peu sûrs et quelquefois même, contradictoires. Or justement, l'un des buts de l'analyse logique est de nous mettre à l'abri des erreurs de notre expérience sensible, des incertitudes de notre intuition ou de notre imagination et des fautes de raisonnement auxquelles nous serions enclins.

Pour parer à de tels inconvénients, la mathématique s'est peu à peu corrigée, en devenant non seulement rigoureuse dans ses déductions, mais *axiomatique* dans ses fondements; cela veut dire, puisque, sous peine de régression à l'infini, il faut bien partir de quelque chose, que les *notions* initiales qu'on ne saurait *définir* par d'autres et les *hypothèses* initiales, *démontrer* par d'autres, seront explicitement énoncées dès le début de chaque discipline particulière; on pourra, de la sorte, définir les autres notions et démontrer les autres propositions. Nos auteurs l'ont clairement expliqué et ont indiqué de quelle manière l'axiomatique elle-même, de primitive et presque matérielle ou, comme ils disent, *substantielle* et prise ainsi au sens *large*, est devenue, au sens *strict*, à la fois *formelle* et *existentielle*.

On pourrait ajouter à l'appui de leurs dires, trois remarques d'ordre historique.

L'évidence indiscutable des fondements à contenu réel de la première axiomatique fut mise en question, d'abord, indirectement, par EUCLIDE lui-même, qui ne plaçait pas son *postulatum* des parallèles au rang des *axiomes* (alors qu'aujourdhui, l'on considère généralement ces deux mots comme synonymes) ([23]); puis, pour la première fois, d'une manière directe et systématique, par LOBATCHEWSKI, par BOLYAI et, selon certaines lettres et notes ultérieures, par GAUSS ([24]), lorsque, indépendamment l'un de l'autre, ils refusèrent le postulatum et édifièrent la plus ancienne des géométries non-euclidiennes. On aurait donc pu soutenir, avant leur découverte, que le postulat des parallèles était d'évidence naturelle, alors que les axiomes, tels que «deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles», étaient d'évidence logique ([25]).

D'autres précurseurs de l'évolution vers l'axiomatique formelle furent, à notre avis, PONCELET et GERGONNE qui, par le principe de duali-

([23]) V. par exemple l'article d'ENRIQUES dans *Encyklopädie d. Math. Wiss.*, 1re éd., III, 1, 1, p. 7; éd. française, III, 1, 1, pp. 1-2.

([24]) ENRIQUES, *ibid.*, pp. 41 sqq.; éd. française pp. 43 sqq.

([25]) Sur ces questions, lire aussi: RUSSELL, *Essay on the Foundations of Geometry*, 1897, traduit de l'anglais, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 12.

té [26], montrèrent que certains énoncés et certains raisonnements géométriques concernant les points d'un plan, s'appliquent mot à mot aux droites et vice versa, moyennant une traduction appropriée, ce qui établit avec force, que des démarches de l'esprit peuvent se détacher des objets qui leur ont donné naissance et devenir comme un cadre, un schéma prêt à accueillir d'autres objets; en ce sens, elles se vident de matière, se «désubstantialisent».

En contraste avec cela, les objets nommés et étudiés dès le début d'une axiomatique substantielle quelconque, arrivent avec toute sorte de propriétés qui ne se dégagent que petit à petit, comme celles des plantes qu'observe un botaniste; c'est pourquoi HB nous dit qu'ils finissent par former des *espèces*; tandis qu'en axiomatique formelle, parce que nous posons d'emblée des êtres abstraits dont la signification implicite viendra uniquement des axiomes, il n'en faut d'abord admettre que l'*existence,* c'est-à-dire les présenter comme des symboles doués de leur seule individualité; les objets formeront un *domaine* d'individus et se seront, eux-mêmes, désubstantialisés. La principale différence de point de vue est donc, en quelque sorte, que le domaine est posé comme point de départ axiomatique ou logique, alors que l'espèce, étant constatée, apparaissait comme un point d'arrivée.

Et pourtant, combien cette distinction va nous paraître fragile et sujette à caution !

§ 3.- *Objections dues au processus de l'abstraction*

HB affirme, en effet, que s'il y a une infinité d'individus, l'existence de ce domaine, c'est-à-dire la supposition qu'ils forment un tout, une *classe,* s'appuie sur une hypothèse d'*abstraction* (ou d'idéalisation) qui s'ajouterait aux axiomes de la théorie qu'on étudie. Or on ne voit pas pourquoi la même remarque ne s'appliquerait pas, déjà, aux éléments d'un ensemble fini.

Car si l'on part d'objets concrets, leurs images mentales sont une première abstraction et l'idée de leur totalité, de la classe qu'ils forment, en est une autre; le fait que celle-ci soit finie et qu'on l'appelle une espèce et non un domaine, ne change rien à la chose.

Cette abstraction de l'espèce est autre mais, à la vérité, voisine de celle de ses membres, si voisine, même, que l'on ne pense pas toujours à l'en séparer, surtout quand leur nombre est petit. Pour prendre un cas extrême, entre une collection formée d'un seul objet

[26] Pour l'histoire de ce principe, v. G. Loria, *Il passato e il presente...*, 4e éd., 1931, pp. 21-22; aussi Russell, *loc.cit.* [25], p. 163; Enriques [23], p. 93.

et cet objet lui-même, la différence existe; mais elle est subtile et peut passer inaperçue; on conçoit très bien, cependant, une espèce végétale ou une collection de timbres-poste qui ne seraient représentées que par un exemplaire unique... et rare !

Déjà la distinction devient plus apparente, s'il s'agit de quelques-uns. On connaît le *paradoxe des apôtres,* tel qu'il y a trente ans, il nous a été rapporté (en italien) par Enriques: «Apôtres étaient douze; or Pierre et Paul étaient apôtres; donc Pierre et Paul étaient douze». Pourtant, il est bien évident que le prédicat «douze», c'est-à-dire le *nombre cardinal,* concerne la classe et non les individus, ce qui, dans une phrase française complète, se verrait par l'emploi correct de l'article. Incidemment, ceci est un tout petit exemple des conséquences que peut produire un changement de langage.

De même, supposons une peuplade ne sachant compter que jusqu'à vingt et pour qui «plus de vingt» s'exprimerait par le seul mot «beaucoup». Il lui faudra un sérieux effort de réflexion et d'abstraction, pour penser à *tous* les poissons d'un lac ou à *tous* les arbres d'une forêt; néanmoins, nos sauvages savent parfaitement, par exemple, que tous les arbres sont verts et que tous les poissons se pêchent dans l'eau.

Les totalités, même finies, sont donc une abstraction bien distincte de celle des individus qui les composent; toutefois, elles en sont assez proches, pour que la plupart des propositions concernant la classe puissent s'exprimer en termes de ses éléments, c'est-à-dire par un *produit logique,* qu'il y en ait peu ou beaucoup.

Si nous considérons donc des objets concrets *donnés,* et ils sont par conséquent en nombre fini, l'idée de la classe peut très bien, comme le dit HB, s'introduire par une définition ou, si l'on veut, par une *synonymie,* une équivalence de langage, qui résulte d'une constatation immédiate: *tous* se ramène à *un quelconque,* en passant par *un et un et un ... et un.*

Prenons une provision de boules, dont chacune soit ou blanche ou noire. Affirmer que «toutes sont blanches» revient à dire qu'«une quelconque est blanche» et il n'y a pas de différence, qu'il y en ait, en tout, 1 ou 2 ou 1000 ou $10^{10^{10}}$ (un suivi de dix milliards de zéros).

Tirons donc une quelconque des boules, c'est-à-dire *n'importe laquelle*; si nous pouvons assurer a priori qu'elle est blanche, nous exprimons donc une connaissance qui permet précisément l'emploi des synonymes: *chaque* boule est blanche, *toutes* sont blanches.

Mais bien plus, nous disons que ces mêmes mots s'appliqueraient aussi correctement à une *espèce* de boules qui semblerait se créer au fur et à mesure, ou tout au moins se dégager peu à peu, qu'à un ensemble bien caractérisé d'avance ou à une classe bornée, comme HB l'admet: nous employons indifféremment les mots «une quelconque, chaque, toutes» et cela, que nous supposions que les boules sortent d'un sac où elles forment une provision, ou d'une machine qui continuerait à les fabriquer pendant un temps, même indéterminé. Pourquoi la synonymie résulterait-elle de ce que l'ensemble est limité ? La différence ne proviendrait-elle donc que d'une connaissance fortuite ? C'est par la même équivalence verbale que nous disons que le soleil se lève tous les jours, chaque jour, n'importe quel jour, un jour quelconque; nous n'avons cependant aucune idée jusqu'à quelle époque il en sera ainsi.

Et d'autre part, les espèces concrètes des sciences naturelles sont-elles nécessairement finies, alors que de nouveaux individus sont procréés, sans que nul ne sache, si ce processus doit s'arrêter un jour?

En fin de compte, nous pensons qu'il n'y a pas lieu de séparer les classes, selon qu'elles sont finies ou non, en espèces et en domaines d'existence, car cette distinction se résout en l'état accidentel de nos connaissances. Ceci est vrai, tout particulièrement, quand les êtres considérés sont abstraits, tels que des concepts mathématiques. Ainsi, l'on ne sait pas toujours d'avance, si la classe des solutions d'un problème est *vide, finie* ou même *infinie* ([27]).

Mais si «tous» revient à «un quelconque», faut-il donc s'étonner que certaines difficultés qui paraissaient réservées à des domaines d'individus, concernent déjà les individus eux-mêmes, sans qu'il soit besoin, ni même utile, de se demander, s'ils sont éléments d'un ensemble constitué ou membres d'une espèce en gestation ?

Un autre exemple de cette distinction entre la classe et ses éléments, se présente à l'esprit; c'est celui de l'identité $x=y$. Selon nos auteurs, celle-ci doit être acceptée, dès qu'on pose un domaine d'individus, «tout en n'étant pas», disent-ils, «à proprement parler une relation».

D'abord, ils ne donnent aucune raison convaincante, pour enlever ce caractère à l'identité qui est, selon nous, une relation, non entre deux objets, mais entre deux symboles: on affirme qu'ils désignent le même objet et qu'on peut remplacer un signe par l'autre, du moins dans un certain champ d'applications. Constatons surtout, que l'identité regarde les objets pris *un à un,* même s'ils sont destinés à former

([27]) Sur la notion de classe, on consultera utilement les travaux de M. Quine, notamment: *From a logical point of view,* Harvard Univ. Press, 1953, qui contient une bibliographie, ainsi que ceux de MM. Hao Wang et R. McNaughton, tels que *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles,* Paris-Louvain, 1953.

une espèce; sans elle, on ne saurait les distinguer ni les retrouver. Logiquement, l'identité est donc, sinon antérieure (l'ordre n'importe pas), du moins tout à fait distincte et indépendante de la totalité de l'espèce ou de la nature du domaine invoquées.

Et même, contrairement à leur propre remarque, les auteurs le reconnaissent-ils implicitement, puisqu'ils disent que l'identité n'est empruntée à aucun domaine particulier et qu'elle ne sert qu'à «trier les individus».

Mais on pourrait nous faire une autre objection: avons-nous le droit de dire que «tous» équivaut à «un quelconque», si nous ne disons pas «un de quoi» ? Par exemple, pour les poissons du lac, n'est-ce pas, après tout, un être quelconque de cette espèce poisson vivant dans le lac ?

Nous convenons volontiers que, chaque fois que nous observons des objets matériels, ils nous apparaissent comme doués «en vrac» de diverses propriétés qui dépendent, soit de ces objets pris individuellement, soit de leurs rapports entre eux ou avec d'autres; en voici un exemple: «ceci est une maison; elle est blanche; elle a deux fenêtres à côté de la porte; elle est l'une des cinq maisons contiguës et est située à l'entrée du village». C'est nous et nous seuls qui mettons de l'ordre, et même un ordre linéaire, dans des notions qui s'enchevêtrent; parce qu'il faut bien parler successivement des choses.

D'une manière analogue, pour les poissons, il suffit donc que cela signifie «un poisson quelconque qui vit dans le lac» et l'on n'a pas besoin de savoir d'avance, ni s'il fait partie d'un ensemble, c'est-à-dire, en fin de compte, s'il n'est pas seul, ni s'il a d'autres propriétés pertinentes.

Et il importe peu de se demander, si les individus précèdent la totalité et même, si cette question a un sens; il suffit de constater que l'on peut exprimer celle-ci par ceux-là, c'est-à-dire montrer une classe finie par la désignation de ses éléments. C'est dans cette acception que «tous» revient à «un quelconque» par une simple transposition du langage, mais sans que jamais on ne doive oublier la distinction qu'a soulignée le paradoxe des apôtres.

Donc, déjà pour les ensembles finis, la cause nous paraît entendue: une classe, même si elle n'a qu'un élément (cas d'ailleurs exceptionnel), est autre chose que cet élément: c'est une abstraction différente. Et l'on vient de voir que la plupart de ses propriétés concernent déjà les éléments et qu'on peut, presque toujours, remplacer la classe par une définition, par une synonymie de langage, donc, pour parler comme HB, contrôler le *barême* des valeurs de vérité d'un prédicat, par un *criblage* effectif de l'ensemble considéré comme modèle.

Mais allant bien en-deçà des espèces à exemplaire unique, on en a même imaginé, qui en sont totalement dépourvues, tels certains chaînons ignorés entre l'homme et ses lointains ancêtres, ou des cases longtemps vides du tableau de MENDELEEV.

Il est cependant compréhensible qu'HB fasse la convention d'exclure, une fois pour toutes, le cas où un domaine d'individus serait vide. La raison que donnent nos auteurs, c'est qu'un domaine vide occupe formellement une situation exceptionnelle et que, pour les applications, il est trivial et sans valeur; on pourrait dire: que restera-t-il d'un modèle, s'il n'existe pas ?

Mais leur remarque ne contredit pas au fait, qu'on ne peut pas se passer de l'ensemble vide, complément de l'ensemble universel; pas plus qu'en arithmétique, du zéro, qui cependant n'a été admis comme nombre, qu'après bien des débats. Autre chose est de se servir d'un tel ensemble comme domaine d'individus ([28]).

§ 4.- *Une parenthèse de nature logique*

C'est sans doute le moment de faire, par parenthèse, une observation accessoire: HB a signalé [cf. chap. I, note ([15])], qu'il ne faut pas confondre un domaine vide avec une hypothèse telle que «tous les S sont P», dans le cas où il n'y a pas d'S. Et pourtant, on pourrait justement considérer que les S forment un domaine, vide par hypothèse.

Nos auteurs rappellent, à ce propos, qu'en logique moderne, on accepte l'implication $S \rightarrow P$ (lire: S *implique* P) aussi dans ce cas-là, de sorte qu'une hypothèse fausse (par exemple S, quand il n'y a pas d'S) entraîne la vérité d'une implication absolument quelconque; ne pas accepter cela, obligerait, on le sait, à compliquer notablement le langage de la logique formelle.

Ce raisonnement apparaît clairement dans l'exemple que nos auteurs donnent, d'après M. VEBLEN, d'un modèle géométrique constitué seulement de cinq points, tous en ligne droite [cf. notre chap. I, p. 8]: le postulatum d'EUCLIDE se vérifie *à vide*, puisque l'hypothèse d'un point pris hors de la droite est nécessairement fausse. Ceci paraît à tel point évident à HB, qu'à cet endroit, il ne le souligne même pas; cependant, il y reviendra dans un chapitre ultérieur ([29]).

([28]) On sait aujourd'hui, que la condition nécessaire et suffisante pour la cohérence d'un système de formules, est l'existence d'un modèle dont le domaine *n'est pas vide* (théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM-GÖDEL-HENKIN, cf. L. HENKIN, *The completeness of the first order functional calculus* (*Journ. of Symbolic Logic*, t. 14, 1949, pp. 159-166)).

([29]) pp. 106-107 notamment.

Mais alors, peut-on répondre, la négation lobatchewskyenne du postulatum (par la pluralité des non-sécantes) se vérifierait exactement de la même manière. Et dans ce cas, même si le modèle satisfait formellement au système de M. VEBLEN, l'hypothèse fausse ne perd-elle pas sa valeur démonstrative, puisqu'elle souffle indifféremment le vrai et le faux et qu'un modèle vide établit, aussi bien, la cohérence du système qu'on étudie que celle d'un système opposé ?

C'est ainsi que s'éveille en nous le scrupule, de voir n'importe quel système d'axiomes, même le plus invraisemblable, se justifier, mais à vide, par un modèle astucieusement choisi pour le contredire.

Par exemple, toute géométrie ne deviendrait-elle pas consistante dans un espace sans points, où c'est à vide que tous les axiomes se vérifieraient ? HB répliquerait, sans doute, qu'il a écarté, une fois pour toutes, les domaines privés d'éléments. Mais quelle est la différence entre un système où *tous* les axiomes se vérifient à vide et un autre, où *un* axiome seulement se prête à cet exercice ?

En peu de mots, si les domaines vides occupent, comme le dit HB et cela, à juste titre, une place à part, n'en est-il pas de même des hypothèses fausses ? Et ne faut-il pas, ou bien exclure celles-ci aussi bien que ceux-là de nos raisonnements, ou bien accepter, par raison purement formelle, même les domaines d'individus sans individus ? Encore faudra-t-il voir de quelle manière on les utilisera; car il n'est pas impossible que, dans certains cas, on puisse les employer sans risque.

§ 5.- *La notion d'infini et le paradoxe de Zénon*

Faisant maintenant un nouveau pas, ou plutôt, comme nous le verrons un peu plus tard, deux pas en une fois, HB étudie les totalités *infinies* et nous montre, pour commencer, que jamais elles ne sont données directement par nos sens ([30]).

A titre d'exemple, pour autant que c'en soit un, nos auteurs rappellent le paradoxe de ZÉNON, dont ils critiquent la réfutation courante; ils en proposent une, fort originale, que nous avons rappor-

([30]) On définirait ici un ensemble comme infini, si ses éléments ou une partie d'entre eux peuvent être mis en correspondance biunivoque et réciproque avec les nombres naturels.

Cet article était pour ainsi dire achevé, quand nous avons eu connaissance de l'intéressant travail de M. P. LEVY, *A propos du paradoxe et de la logique,* Paris, *Revue des Ingénieurs...,* avril 1956 et *Revue de Méta,* n° 2, 1957. Nous avons pu constater que nos idées sont très peu éloignées des siennes.

tée dans notre précédent chapitre, mais qui ne nous convainc nullement: celle-ci revient à dire, en comparant la division du mouvement à celle de l'eau, qu'on ne peut pas la faire à l'infini, sans modifier profondément la nature de l'objet divisé.

Bien que ce ne soit ici qu'une nouvelle parenthèse, remarquons que, si ingénieuse soit-elle, l'analogie nous paraît douteuse: comparaison n'est pas raison ! Car on connaît la grandeur de la molécule et l'on peut calculer approximativement, à quel stade de la division, une fraction *finie* d'eau cesse d'être de l'eau; tandis qu'après *n'importe quelle* division finie, un mouvement reste un mouvement, sauf peut-être dans une savante mais problématique extension de la théorie des quanta. Or, pour ZÉNON, s'agit-il donc d'une division réalisée, donc finie ?

Une première solution de l'énigme nous paraît déjà plus simple que celle d'HB: s'il est possible, du moins par une démarche de la pensée, de décomposer, à l'infini cette fois, un mouvement (que cela s'appelle encore ou non du mouvement est, au fond, sans importance), il n'est ni plus ni moins difficile de le restituer dans sa totalité à l'aide des petits morceaux qu'on vient de fabriquer; cette nouvelle opération est l'exact complément de la première; et l'on ne voit pas en quoi leur confrontation ferait naître un paradoxe. Mais il y a mieux.

On peut se demander, si la réfutation par la convergence des temps employés est vraiment aussi éloignée de toucher le fond de l'affaire que le pensent nos auteurs.

Il est vrai que la décomposition du mouvement, conçue par ZÉNON, est très artificielle; mais celle-ci étant admise, quelle différence de principe y a-t-il entre Achille rejoignant la tortue en un temps fini et la possibilité de sommer une série convergente ? Car si l'on voulait s'abstraire de l'idée de limite, on pourrait répondre ce qu'HB dit du paradoxe lui-même, que la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ «se présente à nous par un achèvement que, ni en fait ni même en principe, notre esprit ne peut effectuer».

Mais avec la notion de limite, tout devient simple. On définit, en effet, la limite de la suite des sommes partielles de $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, comme valant 1, en concordance avec toute la théorie des limites et l'on perd heureusement de vue, qu'on est parti d'un symbole représentant, à strictement parler, une suite illimitée d'opérations, qu'aucun esprit ne saurait effectuer «ni en fait ni même en principe».

Et puis, dans le cas du mouvement, une pareille infinité a été introduite d'une manière bien plus artificielle encore, comme une vue gratuite de la pensée, qu'aucune perception de nos sens ne nous a jamais imposée ni même suggérée.

Alors, de deux choses l'une: ou bien nous renonçons à cette division arbitraire illimitée du mouvement et il n'y a pas de paradoxe; ou bien, si nous la conservons, nous pouvons y joindre tout l'acquis séculaire de la théorie des limites et le paradoxe ne surgit que pour se résoudre aussitôt, puisque, dès ce temps-limite dépassé, l'animal le plus lent est dépassé, lui aussi !

§ 6.- *L'infini et les paradoxes logiques*

En revanche, nous pouvons évidemment donner raison à HB, lorsqu'il nous dit que les totalités infinies ne sont pas des données immédiates de nos sens.

Mais si nos auteurs ont cherché le modèle d'un ensemble illimité, dans le monde sensible, puis montré que cette recherche était vaine, c'est qu'à la suite des travaux et surtout, selon eux, des découragements de Frege, certains mathématiciens avaient abandonné tout espoir de justifier le rassemblement des nombres entiers en une classe. Or le principal argument qu'ils pouvaient opposer à cette conception, de même qu'à la classe des prédicats à laquelle Frege avait tenté de la réduire (ce qui ne faisait du reste que déplacer et compliquer la question), tenait sans doute aux fameux *paradoxes de la théorie des ensembles.*

Il nous paraît donc opportun de rappeler aussi brièvement que possible, comment M. Perelman les a résolus, et cela d'une manière claire, en montrant qu'ils s'appuyent sur une hypothèse vicieuse. Ce sera notre troisième parenthèse; mais elle est un peu longue.

Son raisonnement élucide la plupart des paradoxes, devenus classiques et, en particulier, ceux auxquels HB fait allusion. Tel est celui des prédicats qui ne sont pas applicables à eux-mêmes (contrairement au prédicat «abstrait» qui est abstrait, ou à l'adjectif «français» qui est français); ou, mieux encore, celui, très célèbre, de M. Russell ([31]) de «l'ensemble, *E,* de tous les ensembles, qui ne sont pas un

([31]) On sait qu'un ensemble peut avoir des ensembles pour éléments, comme, par exemple, l'ensemble des peuples du monde; ou encore, l'ensemble des ensembles de nombres naturels. Le paradoxe de Russell, c'est que notre *E* ne saurait, ni être un de ses propres éléments, ni ne pas l'être, comme on le voit sans peine par un raisonnement immédiat d'apparence naïve (v. par ex. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre,* Springer, 1923, pp. 153-4).

de leurs propres éléments». Prenons ce dernier comme modèle de ces paralogismes.

Définissons l'*équivalence* de deux propositions, p et q, que nous représenterons par $p \sim q$ (lire: p *équivaut à* q), comme étant leur implication mutuelle, c'est-à-dire $p \to q$ *et* $q \to p$; et faisons d'abord une remarque.

Il est clair qu'aucune proposition, p, n'est équivalente à sa négation, $\bar{p}$ (lire: *non-p*). Supposons, en effet, le contraire et qu'on ait $p \sim \bar{p}$; par définition, nous avons, d'une part $p \to \bar{p}$, d'où il suit que p est faux (car s'il était vrai, il ne saurait entraîner sa négation, qui est fausse); et d'autre part $\bar{p} \to p$, dont on tire que p est vrai (car s'il était faux, c'est $\bar{p}$ qui serait vrai dans la logique classique, en vertu du *principe du tiers exclu*; et de nouveau, une proposition vraie ne peut en impliquer une fausse). Donc l'équivalence $p \sim \bar{p}$ aurait pour conséquence, à la fois, que p serait *faux et vrai,* ce qui est absurde (en vertu du principe de contradiction) ([32]).

Bref, une proposition équivalente à sa négation ne saurait être, ni supposée vraie, ni supposée fausse: elle est *inconcevable*; et la formule $p \sim \bar{p}$ est, par conséquent, toujours fausse.

Appliquons maintenant cette remarque à la formule

$$(Ea)(x)\ \ (R(x,a) \sim \overline{R(x,x)}) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (I)$$

qui se lit: *il existe un a* tel que, *pour tous les x,* le prédicat R(x,a) est équivalent à la négation du prédicat R(x,x), où a et x sont des individus d'un certain domaine (non vide) et R, un prédicat à deux arguments. La formule I est donc la définition d'un certain individu, a (mais on n'affirme pas qu'il n'en existe qu'un).

Cette proposition étant, *par hypothèse,* vraie pour tous les x, doit le rester, en particulier, si l'on fait x=a; elle devient alors $(Ea)\ (R(a,a) \sim \overline{R(a,a)})$.

Or, d'après ce que nous venons de voir, cela est impossible ! Autrement dit, on ne peut concevoir qu'il existe un individu, a, et un prédicat, R(x,y), tels que R(a,a) et sa négation $\overline{R(a,a)}$ s'impliquent mutuellement.

([32]) Accepté, jusqu'à nouvel ordre, par les intuitionnistes; mais sait-on jamais ? D'ailleurs, dans la logique de M. Brouwer, qui refuse le principe du tiers exclu, il faudrait écrire $\bar{p} \to p \to \bar{\bar{p}}$, ce qui entraînerait, sinon la vérité de p, du moins sa double négation qui, selon cette conception, n'est pas nécessairement son affirmation. Donc, ici encore, $\bar{p}$ ne pouvant entraîner sa négation $\bar{\bar{p}}$, l'équivalence $p \sim \bar{p}$ serait impossible. A moins que p soit une proposition *tierce,* dont les intuitionnistes ne veulent pas; car, d'après leur conception de base, si une proposition n'est pas vraie et n'est pas fausse, on n'en saurait rien affirmer, pas même qu'elle est tierce, c'est-à-dire ni vraie ni fausse.

On n'a donc pas le droit de poser la formule I de départ; c'est elle qui est fautive. Toutefois, on peut la corriger en spécifiant que, par nécessité, x est distinct de a, qu'il est interdit de les identifier et qu'il importe d'ajouter à I, la règle

$$x \neq a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(II)}$$

Supposons maintenant que nos individus x,y soient des ensembles et que le prédicat R(x,y) signifie «l'ensemble x est un élément de l'ensemble y» (cf. 31); donc R(x,x), que x est un de ses propres éléments. La définition de l'ensemble *E* dont nous avons parlé, appelons-le maintenant a, de tous les ensembles x, qui ne sont pas un de leurs propres éléments, sera précisément donnée (comme toute définition) par une implication mutuelle; dans ce cas particulier de la formule I, elle peut se lire «il existe un ensemble a, défini comme ceci: si x est un ensemble *quelconque,* ' x est un élément de a ' *équivaut* à ' x n'est pas un élément de x '».

Pour que cette définition ait un sens, il faut donc, avant de commencer, bien souligner la règle II; sans elle, l'expression I perd toute signification. Et alors, le paradoxe cesse «faute de combattants».

On peut dire, en d'autres termes, qu'il est interdit, en partant de notre définition de l'ensemble a, appelé d'abord E, de l'admettre dans une classification qui n'a de sens que s'il en est exclu.

La situation est un peu la même, *mutatis mutandis,* que dans la division algébrique, où l'on doit toujours s'assurer que le diviseur est distinct de zéro; si l'on néglige cette précaution, on fait une erreur de calcul et l'on tombe aussi dans des absurdités ([33]). Mais qui donc ferait état d'une telle faute, pour rejeter l'arithmétique ou l'algèbre ? Et il n'est pas plus raisonnable de reprocher à la logique ou à la théorie des ensembles, le sophisme qui résulte d'une transgression de la règle II.

Il n'y a donc pas de motif, pour échapper au paradoxe de M. Russell d'amputer les mathématiques, ainsi qu'on l'a parfois demandé, des ensembles infinis, fussent-ils aussi généraux que l'ensemble de tous les ensembles ou l'ensemble de tous les prédicats; à plus forte raison, d'ostraciser l'ensemble des nombres entiers et, comme il est donc arrivé, par désespoir paraît-il, à Frege, d'abandonner à jamais la logique ! Mais ce qu'il faut faire, c'est n'utiliser ces notions qu'avec prudence, afin d'éviter l'introduction subreptice, dans les argumentations, d'hypothèses fautives.

Alors que des règles de raisonnement ont été données qui protègent contre les paradoxes connus de la théorie des ensembles et ceux du

([33]) On en tire aussi des paradoxes amusants bien connus.

même type, par exemple la règle II, on entend parfoit souhaiter, qu'il soit fourni de telles prescriptions immunisant contre toute erreur possible. Cette exigence nous paraît démesurée: on connaît donc certains paradoxes et l'on sait aujourd'hui comment les éviter; on a même proposé plusieurs manières de le faire; celle de M. Perelman, cette règle II, nous semble la plus économique, autrement dit, celle qui demande le moins d'abandons. Mais qui peut prévoir tous les sophismes qu'il y aurait moyen d'édifier ? Ce serait comme chercher une machine, à laquelle aucun accident ni aucune panne d'aucune sorte, même voulue, ne pourrait jamais arriver ! Sont-ce là des prétentions raisonnables ?

§ 7.- *Le non borné et l'infini*

Revenons enfin à la question des domaines infinis d'individus, au sujet desquels HB nous rappelle que, si une formule $\mathfrak{A}$ n'est pas universellement fausse, on ne peut plus affirmer, comme pour les domaines finis, qu'on possède, *eo ipso,* un modèle qui y satisfasse.

Remarquons toutefois, que «non universellement faux» ne peut signifier que ceci: il y a des exceptions à cette négation universelle. Et une pareille exception, qui contredit à non-$\mathfrak{A}$, devra satisfaire à la formule $\mathfrak{A}$, du moins en logique usuelle.

Par exemple, dans le domaine des nombres naturels supérieurs à l'unité, on prouve, par une descente infinie (ou autrement), qu'il est impossible que tous soient des nombres composés; on peut donc légitimement conclure qu'il existe des nombres premiers; mais cet exemple est très banal, car on sait en construire autant qu'on veut, 2, 3, 5, 7, ..., 2^{2281}-1 (environ 700 chiffres)...

Quoi qu'il en soit, il reste une question fondamentale sur laquelle nous devrons revenir, celle de Frege: le domaine infini des nombres naturels pourrait-il être contradictoire ? Mais avant cela, il y a un autre point à élucider.

Nous avons dit (au début du § 5), à propos de pareils domaines d'individus, que nos auteurs faisaient deux pas en un.

On peut, en effet, passer directement, comme ils le font, des ensembles finis aux ensembles infinis; mais on peut aussi «décomposer le mouvement». Car, à côté des ensembles d'un nombre connu d'éléments, il y a les ensembles finis dont on ignore le nombre cardinal. Tel est le cas du produit de cette machine qui fabriquerait, sans s'arrêter, des boules blanches ou noires; nous n'avons pas besoin d'affirmer, cependant, qu'elle tournerait pendant l'éternité; dans la négative, on peut qualifier le nombre des boules produites de *fini non borné*. Pour les questions que nous étudions en ce moment, cela équivaut à: fini *indéterminé* et parfois même, à fini *inconnu*.

Nous avons déjà souligné qu'on peut exprimer «tous» par «un quelconque» et remplacer un ensemble par une définition, aussi bien s'il s'agit du fini indéterminé que du fini connu d'avance. Et si une démonstration est remplacée par un criblage, il sera inachevé ou, en quelque sorte, *virtuel*.

Cela était vrai pour des ensembles d'objets matériels tels que ces boules, mais s'appliquait aussi, et nous le répétons, à l'ensemble des images de ces objets, c'est-à-dire aux ensembles finis *abstraits*, que leur nombre soit donc connu ou indéterminé.

Et rien ne nous a empêchés de nous exprimer aussi de la même manière, s'il s'agit d'un ensemble abstrait infini, par exemple d'êtres bien distincts, ordonnés, dont aucun ne saurait être le dernier, tels que les nombres entiers positifs ou encore les nombres premiers. Ainsi, lorsque nous énonçons une propriété de tous les nombres premiers, nous pouvons de nouveau nous servir de mots tels que «chaque, n'importe lequel, un quelconque»: une fois de plus, les propriétés de l'ensemble, mis à part le nombre cardinal, s'énoncent par celles de ses éléments; de même encore, quand nous disons que les racines de l'équation $\sin \pi x = 0$ sont tous les entiers, puisque l'un quelconque la vérifie.

La difficulté, c'est déjà de penser les individus, bien plus que, les ayant pensés, de le faire dans leur totalité, qui s'exprime par une synonymie, une manière de parler; donc il s'agit seulement d'une autre abstraction, ainsi que nous l'avons vu. L'obstacle provient, selon HB, de ce que nous n'avons plus de modèle matériel sensible, à quoi nous raccrocher pour faire le criblage des cas. D'ailleurs, lorsqu'ils disent que, même en mathématiques, «présenter une infinité d'individus est, a priori, impossible», les mots qu'ils emploient prouvent que, pour eux aussi, la vraie question réside dans les individus, dont on ne peut jamais se figurer que quelques-uns. Or, selon nous, cette dernière remarque s'applique déjà aux très grands nombres finis: sincèrement, en pense-t-on toutes les unités sans exception ? Et même, cela est-il nécessaire ?

Nous admettrons volontiers que, pour présenter une infinité d'êtres, on n'a jamais que le moyen de les définir par une propriété caractéristique, à laquelle ils répondent et sont seuls à répondre, donc par un prédicat. Ce qui est nouveau, c'est que, dans leur cas, on sort du domaine de l'analyse combinatoire, parce qu'on sait d'avance qu'aucun criblage ne sera plus possible, ainsi qu'HB le fait remarquer très clairement. Mais peut-on soutenir qu'il l'était encore pour un nombre fini inconnu d'éléments, où nous l'avons qualifié de virtuel ? Et même, s'il s'agissait d'un nombre fini connu mais extrêmement grand, d'objets, ce passage au crible n'était-il pas déjà, comme l'était leur présentation même, une simple vue de la pensée ?

Aucun de ces degrés ne s'oppose donc, selon nous, à définir une collection d'êtres abstraits, par un prédicat; et celui-ci doit-il changer de nature, dès que l'on constate, comme d'ailleurs le font nos auteurs sur certains exemples, qu'il faut absolument une infinité de ces êtres pour y satisfaire ou, pour dire comme eux, une infinité de sujets auxquels le prédicat puisse s'appliquer, tandis que serait absurde l'idée, pour prendre un exemple, d'un dernier nombre premier, ainsi qu'EUCLIDE le savait déjà ?

Mais cette manière de concevoir un domaine infini est une importante raison de nous décharger du fardeau de la preuve exigée par FREGE, que la totalité des entiers constitue bien une classe (c'est-à-dire que cela n'est pas contradictoire), de la même façon que pour des collections finies. A moins que, même pour ces dernières, par exemple l'*ensemble* des trois nombres 1, 2 et 3, on n'exige aussi une démonstration de non-contradiction !

§ 8.- *La nouvelle arithmétisation*

Vers la fin du paragraphe, nos auteurs expliquent ce qu'ils entendaient par *arithmétisation,* au moment où ils écrivirent leur traité (1934): il s'agissait de construire, par axiomes, une arithmétique qui ne pût donner naissance à aucune contradiction, mais assez féconde pour qu'on en sût tirer des modèles aptes à servir de fondement à d'autres disciplines, ainsi, la géométrie.

Puisque, d'après les idées d'HB, il ne serait pas possible de contrôler par un modèle, la cohérence d'un système infini d'objets ni, entre autres, de l'arithmétique elle-même, il faudrait procéder autrement et, afin d'y parvenir, ils ne voient qu'une méthode: c'est de démontrer directement qu'on ne saurait tirer aucune contradiction des axiomes de ces disciplines. Il suffirait même de faire cette démonstration une fois pour toutes, à savoir pour la seule arithmétique; encore faudrait-il indiquer nettement, quels moyens de preuve seront admis.

Bien entendu, si, par ce nouveau procédé (et à condition que ce soit nécessaire), on établit la consistance des axiomes de l'arithmétique, on aura assuré l'*existence* des prédicats employés et, par conséquent, de l'ensemble des nombres eux-mêmes; dès lors, ceux-ci formeront un modèle, comme pour les domaines finis. Car, si l'on accepte avec POINCARÉ, qu'«en mathématiques, exister, c'est être exempt de contradiction», cela ne peut vouloir dire que ceci: on a perpétuellement la faculté d'utiliser des symboles dont on aura prouvé la cohérence logique, puisqu'on pourra le faire à coup sûr et sans courir le danger de tomber dans des pièges.

Quoi qu'il en soit, HB semble donc vouloir établir la non-contradiction de l'arithmétique classique par une sorte d'arithmétique intuitive qu'il appelle *finitiste* et dont il supposera qu'elle est manifestement consistante ([34]).

Les intuitionnistes qui suivent M. BROUWER estiment, on le sait bien, que la cohérence logique ne suffit pas, mais qu'il faut, en quelque sorte, pouvoir toucher les êtres du doigt, non seulement par des constructions, mais encore des constructions effectuées selon certaines prescriptions, d'ailleurs assez arbitraires; et nos auteurs semblent les suivre sur ce terrain. Mais c'est leur affaire; car on peut librement se plier à des règles, mais non les imposer à autrui.

§ 9.- *La notion d'existence devant l'exigence intuitionniste*

Nous sommes donc arrivés à une nouvelle synonymie, celle des intuitionnistes: chez eux et chez HB, exister, pour un domaine fini de notions abstraites, s'emploie dans le sens d'être susceptible d'une construction ou d'un criblage, qu'on puisse suivre pas à pas par des opérations pour ainsi dire matérielles, dont construction et criblage théoriques ne sont, en fin de compte, que des abstractions, des images mentales.

C'est par ces moyens élémentaires qu'ils avaient *constaté* l'absence de contradiction dans les propriétés des éléments d'un domaine fini connu ou espèce; et une fois cette cohérence admise, rien n'empêchait de raisonner sur le domaine et de s'en servir comme modèle pour d'autres théories. Donc, d'après nos auteurs, dans le fini donné, pas de difficulté.

Cependant, pour les domaines finis indéterminés, puis infinis, il nous est apparu qu'il n'y a rien à changer, sauf qu'il ne sera plus possible de paraphraser *tous* les processus mentaux nécessaires, par

([34]) M. G. GENTZEN emploie une arithmétique comprenant une certaine induction transfinie, dont il admet la non-contradiction. Est-ce mieux ? Cf. *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* (*Math. Ann.*, t. 112, 1936, pp. 493-565).

des opérations matérielles. Mais nous nous sommes déjà posé la question: cela est-il vraiment indispensable ?

Il est certain, avons-nous dit, que M. BROUWER par exemple, ne se contente pas de cette absence de contradiction pour justifier une existence mathématique; et il nous semble étrange qu'HILBERT et M. BERNAYS se soient laissé impressionner par cette vue, qui les éloigne cependant de leur attitude principale, laquelle pourrait se qualifier de *formaliste*.

Nous ne pouvons, toutefois, manquer de rappeler, qu'afin d'élargir son système et de quitter les raisonnements les plus élémentaires (et ce ne sera pas la moindre de ses inconséquences), M. BROUWER, ainsi qu'ils le rappelleront plus tard [cf. leur p. 43], tolère qu'on admette «l'hypothèse de la présence d'une déduction ou d'une démonstration, sans que ni l'une ni l'autre ne soit déterminée par sa qualité intuitive» [nach anschaulicher Beschaffenheit]. Et nos auteurs en citeront des exemples tirés de M. BROUWER lui-même.

Mais alors, pour rester consistant avec sa propre position, celui-ci devrait accepter tout le système hypothético-déductif, *où l'on n'agit pas autrement*. Et ne devrait-on pas pouvoir se mettre d'accord avec lui et ses adeptes, à la seule condition de déclarer, dans chaque cas, ou bien si tel raisonnement part d'une supposition gratuite ou d'une hypothèse en rapport avec une intuition, ou bien si tel autre répond à une construction ? Malheureusement, ce dernier pas, à notre connaissance, M. BROUWER ne l'a jamais franchi.

Ce serait, d'ailleurs, exiger l'addition, à chaque théorème mathématique, d'une sorte d'annexe constituée par cette déclaration, dont la plupart des mathématiciens contesteront la nécessité et même l'utilité et la pertinence; car elle serait, au moins en partie, d'ordre psychologique et sa validité ne pourrait être régulièrement discutée que par des psychologues sachant analyser nos intuitions.

Par ce détour, on en revient au seul critère de la non-contradiction, pour assurer l'existence d'un domaine, qu'il soit fini ou infini, d'individus, sujets des prédicats utilisés dans les théorèmes, ou si l'on préfère, arguments variables des propriétés étudiées. Et ce n'est ni l'infinité des objets qui empêchera ces propriétés de *tous* les éléments de s'énoncer par celles *d'un quelconque* d'entre eux, non plus que leur «finitude» qui nous épargnera la démonstration de non-contradiction, pour autant, dans un cas comme dans l'autre, que celle-ci nous apparaisse encore comme indispensable.

Nous nous sommes déjà demandé, si des axiomes au sens large et substantiel permettent bien de balayer comme inutile, ainsi qu'HB le pense, une telle démonstration de cohérence et cela, uniquement, parce que le domaine, qualifié d'espèce, est fini; alors que, selon ce que nous avons vu, cette inutilité a une raison plus profonde.

Et c'est ainsi que nos auteurs sont amenés à construire leur arithmétique finitiste, pour se rendre compte, si elle leur permettra bien de s'épargner cette preuve de non-contradiction; d'ailleurs, comme nous l'avons rappelé, leur réponse sera en partie oui, en partie non.

§ 10.- *Rentrée de l'infini dans le fini*

Mais nous voyons les choses tout autrement, d'autant plus qu'il nous reste une objection, la plus importante de toutes, à formuler ou, plus exactement, à rappeler; car nous l'avons énoncée autrefois ([35]); elle concerne les arithmétiques finies, comme par exemple, l'arithmétique *modulo 2,* c'est-à-dire, si l'on veut, réduite aux seules considérations de parité: l'infini s'y faufile, qu'on le désire ou non, et cela, par le *nombre des opérations* qui n'est pas limité.

En effet, si l'on admet, telle une vérité évidente, ainsi que le fait HB, qu'une pareille arithmétique finie (réduisons-la, pour simplifier, à une seule opération, mais qu'on puisse répéter ([36])) est consistante, cela veut dire qu'aucune contradiction n'y saurait pénétrer, *si loin qu'on en pousse les conséquences,* c'est-à-dire quel que soit le nombre des répétitions de l'opération, qu'on y effectue.

Qui ne voit que pareille affirmation de cohérence revient nécessairement à admettre, qu'à aucun stade une contradiction ne s'introduit ? Et pour s'en assurer, on aura besoin, clairement, d'un équivalent de l'*induction complète.*

Or on ne saurait accepter cette dernière pour l'arithmétique finie, sans ouvrir toute grande la porte à l'arithmétique des nombres naturels, qu'on est donc forcé d'accueillir, par le fait même, comme exempte, elle aussi, de contradictions.

Du reste, il est bien évident que, dans cette arithmétique finie, une opération individuelle appliquée à un exemple, peut se paraphraser par un acte physique, acte qui paraît jouer un certain rôle chez HILBERT et chez M. BERNAYS.

Mais on peut tout aussi bien matérialiser une addition ou une multiplication de l'arithmétique classique. En revanche, ce qu'on ne peut

([35]) v. *Comptes-Rendus du Congrès des Sciences math. de Liège* (juillet 1939), pp. 126-127.

([36]) On appelle cela aujourd'hui une opération *récursive.*

jamais faire, pas plus dans l'un que dans l'autre cas, c'est *effectuer, par des actes, une suite illimitée d'opérations.*

Alors, où est la différence ? Et que devient le finitisme ?

§ 11.- *Résumé.*

Pour nous résumer, tandis que nos auteurs n'admettent pas que, quand on veut prouver la non-contradiction d'axiomes ou vérifier des formules, on puisse considérer, sans plus, l'ensemble des nombres naturels comme un donné, donc comme susceptible de servir de modèle, en revanche, selon notre manière de voir, nous croyons justifiée l'*existence d'une telle classe infinie,* au même titre qu'une classe finie: il nous suffira de montrer qu'elle n'est pas vide et qu'il est impossible qu'elle soit limitée. A moins qu'on ne refuse même l'existence des classes finies ! Y a-t-il quelqu'un, cependant, pour douter vraiment de celle des nombres entiers ?

Si l'on admet les unes et les autres, elles seront de nature à assurer la non-contradiction d'axiomes; car, aussitôt leur existence acceptée, nous posséderons des modèles; mais, dans le cas de l'infini, ce sera, par nécessité, avons-nous vu, un modèle abstrait, n'ayant pas de paradigme dans la nature ni dans nos perceptions sensibles.

Et c'est ainsi, pensons-nous, que sont prouvées la non-contradiction et la «satisfactibilité» des formules de l'arithmétique et l'existence des solutions des problèmes usuels.