CONSIDÉRATIONS HEURISTIQUES SUR LES MÉTHODES DE DÉDUCTION PAR SÉQUENCES

E. W. BETH

1. L'introduction des systèmes LJ et LK n'est justifiée chez Gentzen que par les applications importantes qu'ils permettent. Ce n'est que récemment que des recherches, notamment de Hintikka et de l'Auteur, ont donné une explication de la curieuse structure de ces systèmes. Cependant, cette explication n'est pas complète étant donné que, pour la logique intuitioniste, la méthode des tableaux sémantiques du présent auteur donne lieu à un système formel F_0 qui ne répond pas exactement au système LJ de Gentzen (bien qu'il lui soit équivalent).

Dans cette note, je veux présenter quelques considérations heuristiques qui, me semble-t-il, pourront contribuer à rendre plus compréhensible la curieuse structure des systèmes LJ et LK de Gentzen. Il s'agira notamment d'élucider les deux points suivants:

1°. L'introduction de séquences dont le conséquent fait intervenir plusieurs formules;

2°. Le fait qu'un calcul intuitioniste est obtenu dès que le nombre des formules dans le conséquent est limité à (zéro ou) un.

2. Il ne sera pas nécessaire de sortir du cadre restreint de la *logique de l'implication*. Comme formules nous admettons tous les atomes A, B, C, ... et, si U et V sont des formules, également $U \rightarrow V$. Si $K = \{U_1, U_2, ..., U_m\}$ et $L = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ sont des ensembles quelconques de formules, alors K/L, ou:

$$(U_1, U_2, ..., U_m)/(V_1, V_2, ..., V_n)\,,$$

sera une *séquence* avec l'*antécédent* K et le *conséquent* L.

3. Nous considérons d'abord des séquences K/Z dont le conséquent se constitue d'une seule formule Z. D'une manière fort naturelle une telle séquence peut être interprétée comme expression d'un certain *problème de déduction*:

en partant des prémisses K, *déduire la conclusion* Z.

Le *calcul de séquences* se constituera de règles permettant la *réduction* d'un tel problème à des problèmes plus simples ou la *clôture* d'une suite de réductions successives lorsqu'elle résulte dans la déduction proposée. Le but de notre discussion sera d'établir des règles motivées au préalable par des considérations aussi plausibles que possible. Notre principale source d'inspiration sera le *modus ponens.*

4. Ce motif peut être appliqué «à rebours» lorsqu'il s'agit d'un problème de type $K/U \rightarrow V$. Si ce problème était résolu, alors nous saurions également résoudre le problème $(K, U)/V$. Alors il paraît raisonnable de permettre la réduction du premier problème au second, ce qui s'exprime par le *schéma de réduction*:

<table>
<tr><td rowspan="3">(ij^{b})</td><td>Prémisses</td><td>Conclusions</td></tr>
<tr><td>K</td><td>$U \rightarrow V$</td></tr>
<tr><td>U</td><td>V</td></tr>
</table>

Cela revient, en somme, à supposer que la formule $U \rightarrow V$, une fois qu'elle sera établie, ne pourra servir à rien excepté à une application du *modus ponens.*

5. Si nous nous trouvons devant un problème $(K, U \rightarrow V)/Z$, il sera raisonnable d'essayer de profiter de la prémisse $U \rightarrow V$ en appliquant le *modus ponens* aux deux formules U et $U \rightarrow V$, ce qui exige pourtant de déduire d'abord la formule U. Cela revient à une réduction du problème original aux deux problèmes suivants:
(i) en partant de $(K, U \rightarrow V)$, déduire U [et ensuite V];
(ij) en partant de $(K, U \rightarrow V, V)$, déduire Z;
ou, sous forme d'un schéma de réduction:

<table>
<tr><td rowspan="4">(ijaI)</td><td colspan="2">Prémisses</td><td colspan="2">Conclusions</td></tr>
<tr><td colspan="2">K
$U \rightarrow V$</td><td colspan="2">Z</td></tr>
<tr><td>(i)</td><td>(ij)</td><td>(i)</td><td>(ij)</td></tr>
<tr><td></td><td>V</td><td>U</td><td>Z</td></tr>
</table>

6. Le *schéma de clôture*:

<table>
<tr><td rowspan="3">(i)</td><td>Prémisses</td><td>Conclusions</td></tr>
<tr><td>K
Z</td><td>Z</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

n'a pas besoin d'être expliqué.

7. Malheureusement, les schémas (i), $(\mathrm{ij}^{\mathrm{aI}})$ et $(\mathrm{ij}^{\mathrm{b}})$ ne suffisent pas pour effectuer toutes les déductions qui, au point de vue de la logique classique, sont acceptables et même indispensables. A titre d'exemple, il convient de discuter le problème représenté par la séquence $\emptyset/[(A \to B) \to A] \to A$. Voici le *tableau déductif* qui lui correspond:

	Prémisses		Conclusions	
			$[\ldots] \to A$	
$(\mathrm{ij}^{\mathrm{b}})$	$(A \to B) \to A$		A	
$(\mathrm{ij}^{\mathrm{aI}})$	(i)	(ij)	(i)	(ij)
		A	$A \to B$	A
(i)	....		....	

Le problème original se réduit donc aux deux problèmes:

$$\text{(i)}\quad (A \to B) \to A/A \to B, \qquad \text{et} \qquad \text{(ij)}\quad (A \to B) \to A,\ A/A\,.$$

Or, supposons que le problème (i) admet une solution générale. Alors nous pourrons effectuer la déduction suivante:

(1)	$(A \to B) \to A$	[prémisse]
(2)	$A \to B$	[supposée déductible]
(3)	A	[*modus ponens*]
(4)	B	[*modus ponens*]

Substituons, pour A, la formule $B \to B$. Alors la formule (1) devient:

$$[(B \to B) \to B] \to (B \to B),$$

et cette formule est déductible en partant de l'ensemble vide $\emptyset$. Par conséquent, une formule B quelconque serait déductible de l'ensemble vide $\emptyset$. Mais cela n'est pas admissible; il en résulte que, en général, le problème (i) ne doit pas admettre une solution.

8. Une procédure tendant à combler cette lacune est suggérée par la considération suivante. Supposons que nous ne réussissons pas, comme il était exigé en Section 5, *sub* (i), de déduire U en partant de $(K, U \to V)$, mais que nous tombons immédiatement sur Z. Alors nous aurons résolu le problème original sans avoir recours à la rédution $(\mathrm{ij}^{\mathrm{aI}})$. Il sera donc plus sage de formuler la réduction de la manière suivante:

(i) en partant de $(K, U \rightarrow V)$, déduire soit U [et ensuite V] soit Z;
(ij) en partant de $(K, U \rightarrow V, V)$, déduire Z.

Par conséquent, si nous introduisons un problème de déduction qui correspond à une séquence $(K, U \rightarrow V)/(U, Z)$, le problème insoluble tout à l'heure se résout sans aucune difficulté.

9. Nous mentionnons deux méthodes (d'ailleurs équivalentes) pour effectuer l'amplification qui s'impose. La première consiste à reformuler les schémas de telle façon que dorénavant ils tiennent compte du cas d'un conséquent $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}, n > 1$. L'amplification du schéma (ij^{a}I) présuppose un appel tacite au principe du tiers exclu:

<table>
<tr><td rowspan="3">(ij^{a}C)</td><th colspan="2">Prémisses</th><th colspan="2">Conclusions</th></tr>
<tr><td colspan="2">K
$U \rightarrow V$</td><td colspan="2">L</td></tr>
<tr><td>(i)
[$\bar{U}$]
$\bar{U}$</td><td>(ij)
[U]
V</td><td>(i)
U</td><td>(ij)</td></tr>
</table>

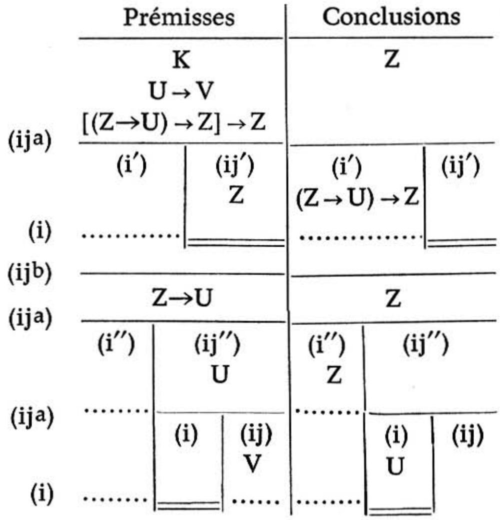
et cette démarche n'est donc pas admissible d'un point de vue intuitioniste. L'adéquation des schémas de réduction et de clôture ainsi amplifiés résulte immédiatement de l'observation qu'ils sont entièrement conformes aux règles de construction et de clôture pour les tableaux sémantiques dans le cas classique.

Notons en passant que si, au contraire, on s'en tient aux schémas (i), (ij^{a}I) et (ij^{b}) sous leur forme initiale, on a une méthode de déduction qui est adéquate pour la *logique intuitioniste de l'implication.*

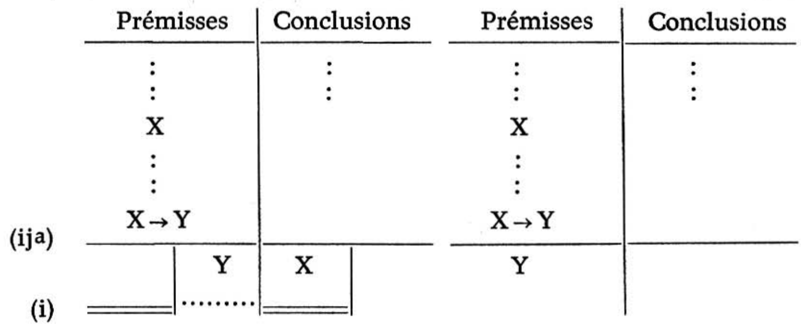
10. La deuxième méthode consiste à retenir les schémas (i), (ij^{a}I) et (ij^{b}) sous leur forme initiale, mais à permettre, chaque fois que pour une séquence $(K, U \rightarrow V)/Z$ on aurait recours au schéma (ij^{a}C), l'adjonction à l'antécédent $(K, U \rightarrow V)$ d'une prémisse:

$$[(Z \rightarrow U) \rightarrow Z] \rightarrow Z .$$

Alors l'appel au schéma (ij^{a}C) devient inutile et peut être remplacé par une suite d'applications des schémas (i), (ij^{a}I) et (ij^{b}) sous leur forme originale:



11. Si, dans une colonne gauche, nous trouvons deux prémisses X et X→Y, alors l'application du schéma (ija) pourra se présenter comme une simple application du *modus ponens*:



12. Pour terminer, je veux démontrer que, pour la logique intuitioniste de l'implication, les axiome-schémas:

(I) $U \rightarrow (V \rightarrow U)$,

(II) $[V \rightarrow (X \rightarrow Y)] \rightarrow [(V \rightarrow X) \rightarrow (V \rightarrow Y)]$,

constituent une base adéquate et que l'adjonction de l'axiome-schéma:

(III) $[(Z \rightarrow U) \rightarrow Z] \rightarrow Z$, suffit pour obtenir une base adéquate pour la logique classique de l'implication, le *modus ponens* constituant dans les deux cas le seul schéma d'inférence.

Il suffit de comparer deux tableaux déductifs:

	Prémisses	Conclusions
K	$\vdots$	Z
	U_k	$\vdots$
	$\vdots$	
	$\vdots$	$\vdots$
		$V \to W$
(ij^{b})	V	W
	$\vdots$	
	X	
	$X \to Y$	
	Y	

	Prémisses	Conclusions
K	$\vdots$	Z
	U_k	$\vdots$
	$\vdots$	
	$U_k \to (V \to U_k)$	
	$V \to U_k$	
	$\vdots$	
	V_1	$\vdots$
	V_2	
	$V_1 \to \{V_2 \to (V \to V)\}$	$V \to W$
	$V \to V$	
	$\vdots$	
	$V \to X$	
	$V \to (X \to Y)$	
	$[V \to (X \to Y)] \to$ $\to [(V \to X) \to (V \to Y)]$	
	$V \to Y$	

Nous avons posé, comme abréviation:

$$V_1: \quad V \to \{(V \to V) \to V\},$$

$$V_2: \quad V \to (V \to V),$$

en sorte que V_1 et V_2 sont des applications de l'axiome-schéma (I), tandis que la formule $V_1 \to \{V_2 \to (V \to V)\}$ est une application de l'axiome-schéma (II). U_k est une formule quelconque dans K. Nous avons représenté dans le tableau à gauche la dernière application du schéma de réduction (ij^{b}). Pour toute formule Y qui se présente dans le tableau à gauche, nous trouvons dans le tableau à droite la formule $V \to Y$; or, si le tableau à gauche est clôturé, le tableau à droite le sera également. Il en résulte que la dernière application (donc *toutes* les applications) peut être remplacée par l'adjonction d'applications appropriées des axiome-schémas (I) et (II).

Or, supposons que le tableau déductif pour la séquence K/Z construit, conformément au point de vue intuitioniste, d'après les schémas de réduction (ij) sous leur forme originale, soit clôturé. L'adjonction d'applications appropriées des axiome-schémas (I) et (II) produit un tableau déductif pour une séquence K^*/Z, construit d'après le seul schéma (ijaI) et clôturé. Cela veut dire que Z résulte de K^* par l'application du *modus ponens.*

Le cas d'un tableau classique se ramène, d'après l'observation faite dans la Section 10, au cas précédent par l'adjonction d'applications appropriées de l'axiome-schéma (III).

Pour terminer, notons que, pour tenir compte de la *négation,* il suffit, tant pour le cas classique que pour le cas intuitioniste, d'introduire les axiome-schémas $\overline{U} \rightarrow (U \rightarrow Z)$ et $(Z \rightarrow \overline{Z}) \rightarrow \overline{Z}$.

BIBLIOGRAPHIE SUCCINTE

E. W. Beth, *Quelques remarques sur la sémantique* (*Revue philos. de Louvain, 54* (1956), pp. 607-625).

E. W. Beth, *La crise de la raison et la logique* (Collection de logique mathématique, Série A, Fasc. XII), Paris-Louvain, 1957.

A. Church, *Introduction to Mathematical Logic,* vol. I, Princeton, N.J., 1956 [pp. 115 (exercise 19.6), 140, 142, 159, 161, 164].

G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique,* trad. et comm. par R. Feys et J. Ladrière, Paris, 1955.

A. N. Prior, *Formal Logic,* Oxford, 1955 [pp. 48-64].

Instituut voor Grondslagenonderzoek en Philosophie der Exacte Wetenschappen, Universiteit van Amsterdam

Amsterdam, le 9 mai 1959