QUASI-ADÉQUATION DE LA LOGIQUE MODALE DU SECOND ORDRE S5 ET ADÉQUATION DE LA LOGIQUE MODALE DU PREMIER ORDRE S5

A. BAYART

Dans le présent article nous renvoyons fréquemment à notre article précédent «Correction de la logique modale du premier et du second ordre S5» (Logique et Analyse 1958, 1.) Nous le désignons par «CLM».

Cet article contenait six sections et trente-trois paragraphes. Les renvois se feront sous la forme «CLM, IV» ou CLM, 12», les chiffres IV et 12 renvoyant respectivement à la quatrième section et au douzième paragraphe.

I.- *Définitions quasi-sémantiques pour la logique du second ordre*

O. Le langage de la logique modale du second ordre contient toutes les propositions de la logique non modale du second ordre; ce sont les propositions du langage L défini dans CLM, 2 qui ne contiennent pas de symboles pour modalités. Si la logique modale du second ordre S5 définie dans CLM, IV était adéquate dans le sens défini dans CLM, 4 il s'ensuivrait que toutes les propositions valides de la logique non modale du second ordre seraient dérivables dans la logique S5 du second ordre.

Or l'ensemble des propositions dérivables dans la logique S5 du second ordre constitue évidemment un ensemble récursivement énumérable. En particulier l'ensemble des propositions ne contenant pas de symboles pour modalités et dérivables dans la logiques S5 du second ordre est lui aussi un ensemble récursivement énumérable. D'autre part du théorème d'inadéquation de Gödel il suit que l'ensemble des formules valides de la logique non modale du second ordre n'est pas un ensemble récursivement énumérable. Il faut en conclure que la logique S5 du second ordre (que nous appellerons S5, 2) ne pourrait être adéquate.

Cette impossibilité n'existe pas pour la logique S5 du premier ordre (que nous appellerons S5, 1) et nous prouverons l'adéquation de cette logique.

Toutefois Henkin a démontré que la logique non modale du second ordre était adéquate dans un sens atténué qui permet de parler de «quasi-adéquation». Nous prouverons que la logique S5 du second ordre est quasi-adéquate dans un sens analogue. En réalité notre exposé n'est qu'une adaptation du théorème de Henkin à la logique modale S5.

1. Soit U un univers composé de l'ensemble A d'individus et de l'ensemble B de mondes et soient a et b les nombres cardinaux de A et B respectivement. Dans CLM, 1 nous avons exposé que nous nous donnions ainsi pour tout nombre naturel n un nombre c = 2 exp (b(a exp n) de prédicats intensionnels à n places.

Donnons-nous pour tout nombre naturel n un ensemble Pn non vide de prédicats intensionnels à n places donnés par U . Les ensembles A, B, P0, P1, P2... constituent alors un quasi-univers Q tiré de U.

Si pour tout nombre naturel n l'ensemble Pn contient tous les prédicats intensionnels à n places donnés par U, Q sera le quasi-univers complet tiré de U. Nous dirons dans ce cas que tous les prédicats intensionnels relatifs à U sont également relatifs à Q.

2. Considérons le langage modal du second ordre L défini dans CLM, 2. Considérons un quasi-univers Q composé de l'ensemble d'individus A, l'ensemble de mondes B et des ensembles de prédicats intensionnels P0, P1, P2... Convenons que les variables pour individus du langage L pourront prendre comme valeurs les individus de l'ensemble A et que, pour tout nombre naturel n, les variables pour prédicats à n places pourront prendre comme valeurs les prédicats intensionnels de l'ensemble Pn.

Si alors nous donnons conformément à cette convention une valeur à chacune des variables du langage L nous nous serons donné un système de valeurs S relatif au quasi-univers Q.

3. Donnons-nous un quasi-univers Q, un monde M de ce quasi-univers et un système de valeurs S relatif à ce quasi-univers. Nous définissons alors comme suit les notions «quasi-vrai pour le quasi-univers Q, le monde M et le système de valeurs S» et «quasi-faux pour la quasi-univers Q, le monde M et le système de valeurs S».

Soit f une proposition du langage L.

Si f est une variable p pour prédicats à O place (c.a.d. une variable pour propositions) si P est le prédicat intensionnel à O place donné comme valeur par S à p, f sera quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS d'après que P prend la valeur «vrai» ou «faux» quand il reçoit M comme argument.

Si f est de la forme bxl... xn où b est une variable pour prédicats à n places (n ≠ 0) et où xl, ..., xn sont des variables pour individus; si B, X1, ..., Xn sont respectivement le prédicat intensionnel à n places et les individus donnés comme valeurs par S à b, xl, ..., xn, f sera quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS d'après que B prend la valeur «vrai» ou «faux» quand il reçoit M, Xl ..., Xn comme arguments dans cet ordre.

Si f a la forme Np, où p est une proposition, f sera quasi-vrai pour QMS si p est quasi-faux pour QMS, et f sera quasi-faux pour QMS si p est quasi-vrai pour QMS.

Si f a la forme Kpq, où p et q sont des propositions f sera quasi-vrai pour QMS, si p est quasi-vrai pour QMS et si q est quasi-vrai pour QMS, et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Apq, où p et q sont des propositions, f sera quasi-vrai pour QMS si p est quasi-vrai pour QMS ou si q est quasi-vrai pour QMS, et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Cpq, où p et q sont des propositions, f sera quasi-vrai pour QMS si p est quasi-faux pour QMS ou si q est quasi-vrai pour QMS, et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Epq, où p et q sont des propositions, f sera quasi-vrai pour QMS si p et q sont quasi-vrais pour QMS ou si p et q sont quasi-faux pour QMS et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Pvp, où p est une proposition et où v est une variable pour individus ou pour prédicats, f sera quasi-vrai pour QMS si, pour tout système de valeurs S′ relatif à Q qui donne à toutes les variables autres que v la même valeur que S, p est quasi-vrai pour QMS′, et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Svp, où p est une proposition et où v est une variable pour individus ou pour prédicats, f sera quasi-vrai pour QMS s'il y a un système de valeurs S′ relatif à Q qui donne à toute les variables autres que v la même valeur que S et tel que p est quasi-vrai pour QMS′, et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Lp, où p est une proposition, f sera quasi-vrai pour QMS si pour tout monde M′ de Q, p est quasi-vrai pour QM′S et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

Si f a la forme Mp, où p est une proposition, f sera quasi-vrai pour QMS s'il y a un monde M′ de Q tel que p est quasi-vrai pour QM′S, et sinon f sera quasi-faux pour QMS.

4. Choisissons un quasi-univers Q et un monde M de ce quasi-

univers. Nous définissons pour les propositions du langage L les notions «quasi-valide pour QM» et «quasi-réalisable pour QM».

Soit f une proposition du langage L.

La proposition f sera quasi-valide pour QM si et uniquement si, pour tout système de valeurs S relatif à Q, f est quasi-vrai pour QMS.

La propositions f sera quasi-réalisable pour QM si et uniquement s'il y a un système de valeurs S relatif à Q tel que f est quasi-vrai pour QMS.

Choisissons un quasi-univers Q. Nous définissons pour les propositions du langage L les notions «quasi-valide pour Q» et «quasi-réalisable pour Q».

Soit f une proposition du langage L.

La proposition f sera quasi-valide pour Q si et uniquement si, pour tout monde M de Q, f est quasi-valide pour QM.

La proposition f sera quasi-réalisable pour Q si et uniquement s'il y a un monde M de Q tel que f est quasi-réalisable pour QM.

Transformons le langage L en un système déductif D en nous donnant des axiomes et des règles de déduction. Choisissons un quasi-univers Q.

Le système déductif D sera quasi-correct pour Q si toutes les propositions dérivables dans D sont quasi-valides pour Q.

Le système déductif D sera quasi-adéquat pour Q si toutes les propositions de L qui sont quasi-valides pour Q sont dérivables dans D.

5. Il est aisé de constater que S5.2 n'est pas correct pour tous les quasi-univers. Considérons en effet un quasi-univers qui, en fait de prédicats intensionnels à 0 place, ne contient que le prédicat qui prend la valeur faux pour tous les mondes. Dans S5,2 on déduit aisément la séquence I,Spp où p est une variable pour propositions. Or Spp n'est pas réalisable dans le quasi-univers considéré. Aussi faudra-t-il, pour développer la quasi-sémantique de S5.2, se donner la notion de «quasi-univers régulier» comme suit.

Dans CLM,9 nous avons donné la définition sémantique de la valeur d'un paraprédicat à n places ($n \neq 0$). Nous aurions dû donner aussi la définition sémantique de la valeur d'une proposition pour un univers U et un système de valeurs S. Soit p une proposition du langage L. La valeur de p pour US est le prédicat intensionnel à 0 place qui pour tout monde M de U prend la valeur vrai ou faux d'après que p prend la valeur vrai ou faux pour UMS.

Nous donnons maintenant les définitions quasi-sémantiques suivantes pour un quasi-univers Q tiré d'un univers U et pour un système des valeurs S relatif à Q.

La valeur d'une proposition p pour QS est le prédicat intensionnel à O place relatif à U qui pour tout monde M de U prend la valeur vrai ou faux d'après que p est quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS.

La valeur d'un paraprédicat à n places Zx1, ..., xn(p) pour QS est le prédicat intensionnel à n places relatif à U qui pour tout monde M de U et pour toute série d'individus A1...An de U prend la valeur vrai ou faux d'après que la proposition p prend la valeur quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS′ où S′ est un système de valeurs relatif à Q qui attribue les individus Al...An comme valeurs aux variables pour individus xl...xn respectivement, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

Il est aisé de voir que la valeur d'une proposition ou d'un paraprédicat pour QS n'est pas toujours un prédicat intensionnel relatif à Q. Ainsi dans le quasi-univers décrit ci-dessus la variable pour propositions p n'est susceptible que de prendre une seule valeur, et quel que soit le système de valeurs S considéré, la valeur pour QS de Np n'est pas relative à Q.

Un quasi-univers Q est régulier si, pour toute proposition p du langage L, pour tout para-prédicat Zx1...xn(p) construit à partir du langage L et pour tout système de valeurs S relatif à Q la valeur de p et la valeur de Zxl...xn(p) est un prédicat intensionnel relatif à Q.

Il est clair qu'il existe des quasi-univers réguliers, notamment les quasi-univers complets. La suite du présent exposé montrera qu'il existe également des quasi-univers réguliers et incomplets.

6. Nous pouvons maintenant achever la serie de nos définitions quasi-sémantiques.

Une proposition est quasi-valide si et uniquement si elle est quasi-valide pour tous les univers réguliers.

Une proposition est quasi-réalisable si et uniquement s'il y a un quasi-univers régulier où elle est réalisable.

Un système déductif D est quasi-correct si toutes les propositions dérivables dans D sont quasi-valides.

Un système déductif D est quasi-adéquat si toutes les propositions quasi-valides du langage L sont dérivables dans D.

II.- *Propriétés quasi-sémantiques des propositions et des parapropositions*

7. Nous paraphrasons dans ce qui suit les théorèmes sémantiques de CLM,III . Certains des théorèmes quasi-sémantiques qui suivent sont valables pour un quasi-univers quelconque; d'autres ne valent que pour les quasi-univers réguliers. Nous indiquons chaque fois quel est le cas.

8. *Théorème I.* Soit un quasi-univers quelconque Q , deux mondes quelconques M et M′ de Q et un système quelconque de valeurs S relatif à Q . Si p est une proposition couverte p a la même valeur (quasi-vrai ou quasi-faux) pour QMS et pour QM′S .

9. *Théorème II.* Soit p une proposition qui ne contient que les variables vl, ..., vn à l'état libre. Soit un quasi-univers quelconque Q , un monde quelconque M de Q , et deux systèmes de valeurs S et S′ relatifs à Q qui ne diffèrent pas entre eux en ce qui concerne les valeurs données aux variables vl, ..., vn . Alors p prend la même valeur (quasi-vrai ou quasi-faux) pour QMS et pour QMS′ . En particulier si p est une proposition fermée, alors, pour deux systèmes de valeurs quelconques S et S′ relatifs à Q , p prend la même valeur pour QMS et pour QMS′ .

10. *Théorème III.* Soit p une proposition qui ne contient que les variables vl, ..., vn à l'état libre. Soit un quasi-univers quelconque Q tiré de l'univers U , et deux systèmes de valeurs S et S′ relatifs à Q qui ne diffèrent pas entre eux en ce qui concerne les valeurs données aux variables vl, ..., vn . Alors p prend la même valeur (voir paragraphe 5 ci-dessus) pour QS et pour QS′ . En particulier si p est une proposition fermée, alors pour un quasi-univers quelconque Q et deux systèmes de valeurs quelconques S et S′ relatifs à Q , p prend la même valeur pour QS et pour QS′ .

Dans CLM,III nous aurions dû formuler un théorème sémantique analogue.

11. *Théorème IV.* Soit k le paraprédicat Zxl, ..., xr(p) qui ne contient que les variables vl, ..., vn à l'état libre. Soit un quasi-univers quelconque Q tiré d'un univers U , et deux systèmes de valeurs S et S′ relatifs à Q qui ne diffèrent pas entre eux en ce qui concerne les valeurs données aux variables vl, ..., vn . Alors k prend la même valeur pour QS et pour QS′ . En particulier si k est un

paraprédicat fermé, alors, pour un univers quelconque Q et deux systèmes de valeurs quelconques S et S′ relatifs à Q, k prend la même valeur pour QS et QS′.

La valeur de la proposition p dans le théorème III et celle du paraprédicat k dans le théorème IV sont des valeurs relatives à U et ne sont pas nécessairement des valeurs relatives à Q.

12. *Théorème V.* Pour un quasi-univers quelconque Q, un monde quelconque de Q et un système quelconque de valeurs S relatif à Q, si Zxl ... xn(p)al ... an est une paraproposition primaire simple bien formée, la valeur (quasi-vrai ou quasi-faux) de la résultante p′ de cette paraproposition est la même que la valeur de la proposition p pour QMS′, où S′ est un système de valeurs relatif à Q qui attribue les individus Al, ..., An comme valeurs aux variables pour individus xl, ..., xn-Al, ..., An étant dans cet ordre les individus attribués par S comme valeurs aux variables al ... an respectivement et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

13. *Théorème VI.* Pour un quasi-univers quelconque Q tiré de U, un monde quelconque M de Q et un système quelconque de valeurs S relatif à Q, si Zxl ... xn(p)al ... an est une paraproposition primaire simple bien formée, et si P est le prédicat intensionnel à n places relatif à U qui est la valeur pour QS du paraprédicat Zxl ... xn(p), la résultante p′ de la dite paraproposition sera quasi-vraie ou quasi-fausse pour QMS d'après que le prédicat P prend la valeur vrai ou faux quand on lui donne comme arguments le monde M et les individus Al, ..., An ces derniers étant dans cet ordre les valeurs données par S aux variables al, ..., an.

Le prédicat P relatif à U n'est pas nécessairement relatif à Q.

14. *Théorème VII.* Pour un quasi-univers régulier Q, un monde quelconque M de Q et un système quelconque de valeurs S relatif à Q, si Zy(p)q est une paraproposition propositionnelle bien formée, la valeur pour QMS de la résultante p′ de cette paraproposition est la même que la valeur de la proposition p pour QMS′ où S′ est un système de valeurs relatif à Q qui attribue comme valeur à la variable pour propositions y le prédicat intensionnel à O place P tel que P est la valeur de la proposition q pour QS, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

(Le théorème analogue VI de CLM,15 aurait dû être énoncé comme suit: Pour un univers quelconque U, un monde quelconque M de U et un système quelconque de valeurs S relatif à U, si Zy(p)q est une paraproposition propositionnelle bien formée, la valeur pour UMS de la résultante p′ de cette paraproposition est la même que la valeur de la proposition p pour UMS′ où S′ est un système de valeurs qui attribue comme valeur à la variable y la valeur du prédicat intensionnel à O place P tel que P est la valeur de la proposition q pour US, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S).

15. *Théorème VIII.* Pour un quasi-univers régulier Q, un monde quelconque de Q, et un système quelconque de valeurs S relatif à Q, si Zb(p)k est une paraproposition prédicative bien formée où b est une variable pour prédicat à n places et k un paraprédicat à n places, la valeur pour QMS de la résultante finale p′ de cette paraproposition est la même que la valeur de la proposition p pour QMS′, où S′ est un système de valeurs qui attribue comme valeur à la variable b le prédicat intensionnel à n places P tel que P est la valeur du paraprédicat k pour QS, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

Dans les théorèmes VII et VIII, du fait que Q est un quasi-univers régulier, le prédicat intensionnel P est relatif à Q, et il est donc possible de se donner le système de valeurs S′ décrit dans ces théorèmes.

16. *Théorème IX.* Soit p une proposition. Soit v une variable. Soit w une variable du même type que v et ne figurant ni à l'état libre ni à l'état lié dans p.

Soit q la proposition que l'on obtient en substituant dans p la variable w à la variable v partout où cette dernière figure à l'état lié (q étant identique à p si v ne figure pas à l'état lié dans p). Alors, pour un quasi-univers quelconque Q, un monde quelconque M de Q et un système quelconque de valeurs S relatif à Q, p et q prennent la même valeur pour QMS.

Preuve par induction sur la construction de p, en distinguant les cas où p a la forme Pvj ou Svj, et ceux où p a la forme Puj ou Suj, u étant une variable distincte de v et de w.

Dans CLM, III nous aurions pu formuler un théorème sémantique analogue au présent théorème IX, mais ce théorème n'y était pas indispensable.

III.- *Quasi-correction et quasi-adéquation de S5, 2*

17. Nous disons qu'une proposition p est dérivable dans S5, 2 si la séquence I, p est dérivable dans S5, 2.

Nous disons qu'une séquence ä, I, ë est quasi-vraie pour QMS si une des propositions de ä est quasi-fausse pour QMS ou si une des propositions de ë est quasi-vraie pour QMS, et sinon nous disons que la séquence est quasi-fausse pour QMS.

On définit alors aisément les notions de quasi-validité et de quasi-réalisabilité pour les séquences.

Nous disons que la proposition p est la représentante de la séquence ä, I, ë si p est une alternative dont les mêmbres sont, dans l'ordre, d'abord les négations des propositions de ä et ensuite les propositions de ë. On démontre aisément que ä, I, ë est dérivable dans S5, 2 si et uniquement si p est dérivable dans S5, 2.

On démontre tout aussi aisément que ä, I, ë est quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS d'après que p est quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS.

Il s'ensuit que la quasi-correction et la quasi-adéquation de S5, 2 peut se définir indifféremment en considérant les propositions ou en considérant les séquences.

18. *Théorème X.* Si toutes les propositions dérivables dans S5, 2 sont quasi-réalisables dans un quasi-univers Q, alors toutes les propositions dérivables dans S5, 2 sont quasi-valides dans Q.

Preuve. Par le fait que, si la proposition p est dérivable dans S5,2 la proposition LPp l'est également, Pp désignant ici la fermeture universelle de p.

19. *Théorème XI.* Si S5, 2 est quasi-correct pour un quasi-univers Q, Q est un quasi-univers régulier.

Preuve. Par les définitions des notions de système quasi-correct et de quasi-univers régulier et par le fait que toutes les propositions de la forme SbLPxl...PxnE.bxl...xn.q, où b est une variable pour prédicats à n places, où xl,...xn sont n variables pour individus distinctes et où q est une proposition ne contenant pas b à l'état libre, ainsi que toutes les propositions de la forme SpLEpq où p est une variable pour propositions et où q est une proposition ne contenant pas p à l'état libre, sont dérivables dans S5, 2.

20. *Théorème XII. S5, 2 est quasi-correct.*

La preuve est analogue à la preuve de la correction de S5, 2 telle que nous l'avons donnée dans CLM ,IV. Il faut tenir compte du fait que la quasi-correction a été définie au paragraphe 6 ci-dessus par rapport aux quasi-univers réguliers uniquement.

Dans la preuve de la correction de la règle PI (voir CLM ,21) on se fonde sur les théorèmes quasi-sémantiques V , VII ou VIII. En vertu de la régularité des quasi-univers considérés il est possible de se donner un système de valeurs S' qui donne à la variable v la valeur donnée par S à l'argument a de la paraproposition Zv(p)a.

21. *Théorème XIII.* Si p est une proposition irréfutable, c.a.d. si la séquence p,I n'est pas dérivable dans S5,2, p est quasi-réalisable.

Preuve. La section IV du présent article sera consacrée à la définition pour toute proposition irréfutable p d'un quasi-univers régulier Q tel que p est quasi-réalisable pour Q.

22. *Théorème XIV.* S5,2 est quasi-adéquat.

Preuve. Si p est une proposition quasi-valide Np sera une proposition non quasi-réalisable. Par contraposition du théorème XIII on obtient que la séquence Np,I sera dérivable; d'où l'on tire facilement que la séquence I,p sera également dérivable.

IV.- *Preuve du Théorème XIII*

23. Dans ce qui suit nous entendons par «proposition» une proposition du langage L défini dans CLM,2 et par «proposition ou séquence dérivable» une proposition ou une séquence dérivable dans S5,2.

Nous employons les lettres majuscules B,D,F, etc., (c.a.d. les lettres autres que N,K,A,C,E,P,S,L,M,Z et I) pour désigner des propositions. Ces lettres pourront être suivies d'un ou de deux indices numériques.

Les expressions B°, D°, F° etc. désigneront des séries ou des ensembles finis ou infinis dénombrables de propositions. Ces expressions pourront être suivies d'un ou de deux indices numériques.

L'usage de ces notations syntaxiques pourra être combiné avec nos notations syntaxiques précédentes.

Si toutes les propositions d'un ensemble ou d'une série B° de propositions sont des éléments d'un ensemble D° de propositions nous disons que l'ensemble ou la série B° est tiré de l'ensemble D°.

24. Un ensemble fini ou infini B° de propositions est cohérent s'il n'y a aucune série finie ä tirée de B° telle que ä,I soit dérivable.

Une série finie ou infinie de propositions est cohérente si elle est tirée d'un ensemble cohérent.

Une proposition p est cohérente avec un ensemble B° de propositions si l'ensemble B°+p est cohérent.

On démontre aisément que si ä est une série finie de propositions tirée de l'ensemble cohérent B° et si ä,I,p est dérivable, p est cohérent avec B°. A fortiori, si I,p est dérivable, p est cohérent avec tout ensemble cohérent.

25. Soit y une proposition irréfutable. Ordonnons l'ensemble des propositions de forme Mp en une série B0, B1, B2... Ordonnons l'ensemble des propositions de forme Svp où v est une variable quelconque en une série D1, D2, D3...

Considérons l'ensemble des couples ordonnés de nombres naturels et ordonnons-le en diagonale comme suit: 00, 01, 10, 11, 20, 03 ...
Donnons-nous la série suivante de propositions F0.0, F0.1, F1.0...

Pour tout nombre naturel n Fn.0 est la proposition KMyCMpp où Mp = Bn.

Pour tout couple de nombres naturels n et m tel que m ≠ 0, Fn.m est la proposition CSvpp' où Svp = Dm et où p' = Zv(p)a, «a» désignant la première variable en ordre alphabétique du même type que v qui ne figure ni à l'état libre ni à l'état lié dans Svp ni dans aucune proposition Fr.s où «r.s» est un indice qui précède «n,m».

Donnons-nous l'ensemble suivant de propositions G0.0, G0.1, G1.0...

Pour tout nombre naturel n Gn.0 est la proposition Mp où p = Fn.0

Pour tout couple de nombre naturels n et m tel que m ≠ 0 Gn.m est la proposition MK... Kp0... pm où p0,..., pm sont respectivement les propositions Fn.0,... ,Fn.m

26. Considérons l'ensemble G° des propositions G0.0, G0.1, G1.0 ....

Lemme I L'ensemble G° défini ci-dessus est cohérent.

Preuve par l'absurde. Soit ä une série finie tirée de G° telle que ä,I soit dérivable. Soit Gn.m la proposition de ä telle qu'aucune autre proposition de ä n'ait un indice de rang plus élevé que n.m. Soit ä' la série composée de toutes les propositions Gr.s appartenant ou non à ä dont l'indice est inférieur à n.m et soit Gn.m = p . Il est clair si ä,I est dérivable p,ä',I l'est aussi.

Nous démontrons que cela est impossible par induction sur le rang de l'indice n.m.

Supposons n = m = 0. Alors G0.0 est une proposition de forme MKMyCMpp et ä' est vide. Nous supposons donc que MKMyCMpp,I est dérivable. Comme on a KMyCMpp,I,MKMyCMpp on obtient par une césure que KMyCMpp,I est dérivable. Comme on a My,CMpp,I,KMyCMpp on obtient par une césure que My,CMpp,I est dérivable. Comme My est une formule couverte on a que MCMpp,My,I est dérivable.

Or I,MCMpp est dérivable comme suit:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{Mp,I,p,Mp}}{\mathrm{I,CMpp,Mp}}}{\mathrm{I,MCMpp,Mp}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{Mp,p,I,p}}{\mathrm{p,I,CMpp}}}{\mathrm{p,I,MCMpp}}}{\mathrm{Mp,I,MCMpp}}}{\mathrm{I,MCMpp}}$$

Dès lors par une césure avec MCMpp,My,I on obtient que My,I est dérivable; d'où il suit par une césure avec y,I,My que y,I est dérivable contrairement à l'hypothèse d'après laquelle y est une proposition irréfutable.

Supposons n ≠ 0 et m = 0. Gn.m a encore la forme MKMyCMpp mais ä' n'est plus vide.

Nous supposons donc que MKMyCMpp,ä',I est dérivable. Nous en déduisons successivement que les séquences suivantes sont dérivables:

KMyCMpp,ä',I

My,CMpp,ä',I

MCMpp,My,ä',I (en effet toutes les propositions de ä' sont couvertes)

My,ä',I (en effet I,MCMpp est dérivable).

Mais ä contient la proposition G0.0 qui a la forme MKMyCMqq. Appelons cette proposition «g». Or on a la dérivation suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\text{My,CMqq,I,My}}{\text{KMyCMqq,I,My}}}{\text{MKMyCMqq,I,My}}$$

C'est à dire que g,I,My est dérivable, d'où par une césure avec My,ä',I on obtient g,ä',I.

Or g est une proposition de ä'. Donc on a ä' ,I contrairement à l'hypothèse de l'induction.

Supposons n quelconque et m $\neq$ 0 . Gn.m a alors la forme MK ... Kp0 ...pm où pm à la forme CSvqq' et où q' est Zv(q)a. Nous supposons donc que MK ...Kp0 ...pm,ä'I est dérivable. Comme Gn.m a un indice de rang plus élevé que toutes les autres propositions de ä' , et comme pm est la proposition Fn.m dont l'indice est de rang plus élevé que toutes les autres propositions qui entrent dans la composition de Gn.m ou d'une proposition de ä' , nous avons que la variable a ne figure à l'état libre ou lié que dans q' c.à.d. dans Zv(q)a.

Dès lors si MK ...Kp0 ...pm,ä',I est dérivable, les séquences suivantes le sont aussi:

K ...Kp0 ...pm,ä',I

K ...Kp0 ...pm-1,pm,ä',I, ou ce qui revient au même:

K ...Kp0 ...pm-1,CSvqq',ä',I,

SaCSvqq',K ...Kp0 ...pm-1,ä',I (en vertu de ce qui a été dit de la variable a).

Or I,SaCSvqq' est dérivable comme suit:

$$\dfrac{(3)\;\dfrac{\dfrac{\text{Svq,I,q',Svq}}{\text{I,CSvqq',Svq}}}{\text{I,SaCSvqq',Svq}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Svq,q,I,q}}{\text{q,I,CSvqq}}}{\text{q,I,SaCSvqq'}}\;(1)}{\text{Svq,I,SaCSvqq'}}\;(2)}{\text{I,SaCSvqq'}}$$

Pour permettre de vérifier la régularité de cette dérivation il convient de faire les remarques suivantes:

(1) q' = Zv(q)a où a ne figure ni à l'état libre ni à l'état lié dans q. Il s'ensuit que q = Za(q')v, et que CSvqq = Za(CSvqq')v.
(2) La variable v ne figure pas à l'état libre dans SaCSvqq'.
(3) CSvqq' = Za(CSvqq')a.

De SaCSvqq',K...Kp0...pm-1,ä',I et de I,SaCSvqq' on obtient par une césure K...Kp0...pm-1,ä',I. Tenant compte du fait que toutes les propositions de ä' sont couvertes on obtient MK...Kp0... pm-1,ä',I. Mais MK...Kp0...pm-1 est une proposition de ä'. Donc on obtient ä',I contrairement à l'hypothèse de l'induction.

Ceci achève la démonstration du lemme.

27. Considérons l'ensemble de toutes les propositions couvertes et ordonnons-les en une série de propositions H1,H2,H3. Nous nous donnons la série suivante d'ensembles de propositions $H^{\circ}0, H^{\circ}1, H^{\circ}2 \ldots$

$H^{\circ}0 = G^{\circ}$.

$H^{\circ}n+1 = H^{\circ}n$ si la proposition $Hn + 1$ est incohérente avec $H^{\circ}n$ et dans le cas contraire $H^{\circ}n+1 = H^{\circ} + Hn+1$.

On voit immédiatement par induction sur n, et tenant compte du fait que G° est cohérent, que, pour tout n, $H^{\circ}n$ est cohérent.

Considérons l'ensemble H° qui est la somme de tous les ensembles $H^{\circ}0, H^{\circ}1, H^{\circ}2 \ldots$

Lemme II L'ensemble H° est cohérent.

Preuve. Par l'absurde. Soit ä une série tirée de H° telle que ä,I soit dérivable. Soit Hn la proposition de ä dont l'indice n est le plus grand. Il est clair que toutes les propositions de ä appartiennent à $H^{\circ}n$. Donc $H^{\circ}n$ serait incohérent, contrairement à ce qui a été constaté ci-dessus.

Lemme III Soit p une proposition couverte. Si p est cohérent avec H°, p est un élément de H°.

Preuve. Soit n l'indice de p dans la série H1,H2,H3 ... Si p est cohérent avec H° il est cohérent avec $H^{\circ}n$-1. Dès lors on a par définition que $H^{\circ}n = H^{\circ}n\text{-}1 + p$. Donc p est un élément de H°.

28 Donnons-nous les ensembles $F^{\circ}0, F^{\circ}1, F^{\circ}2 \ldots$ qui contiennent respectivement les propositions F0.0,F0.1,F0.2 ... ,F1.0,F1.1,F1.2 ..., F2.0,F2.1,F2.2 ...

Donnons-nous les ensembles Q°0,Q°1,Q°2 ... définis comme suit: Q°0 = H° + F°0 ; Q°1 = H° + F°1 ; Q°2 = H° + F°2 ...

Lemme IV. Les ensembles Q°0,Q°1,Q°2 ...sont des ensembles cohérents.

Preuve. Par l'absurde. Soit l'ensemble Q°n. Soit ä une série tirée de Q°n telle que ä,I soit dérivable. Soit ä' la série composée des éléments de ä qui sont des éléments de F°n et soit ä" ce qui reste de la série ä quand on en retranche les éléments de ä'. Soit ä''' la série Fn.0,...,Fn.m où m est le nombre le plus élevé qui figure comme second indice d'une proposition de ä'. Il est clair que si ä,I est dérivable ö''',ä",I l'est également. Considérons la proposition K...Kp0 ...pm où p0,...,pm sont respectivement les propositions Fn.0, ..., Fn.m. On aura que K...Kp0...pm,ä",I est dérivable. Tenant compte du fait que toutes les propositions de ä" sont des éléments de H° et donc des propositions couvertes, on aura que MK...KpO pm,ä",I est dérivable. Mais MK...KpO...pm = Gn.m et Gn.m, tout comme les propositions de ä", est un élément de H°. Il s'ensuivrait donc que H° serait incohérent contrairement au lemme II.

Il est clair qu'un raisonnement identique tient également pour le cas où ä' ne comprendrait que la proposition Fn.O.

29. Considérons l'ensemble de toutes les propositions et ordonnons le en une série R1, R2, R3...

Donnons-nous les ensembles R°O.O, R°O.1, R°1.O définis comme suit:

Pour tout nombre n, R°n.O = Q°n.

Pour tout nombre n et tout nombre m + 1, R°n.m + 1 = R°n.m si Rm + 1 est incohérent avec R°n.m et dans le cas contraire R°n.m+1 = R°n.m + Rm+1.

On voit immédiatement par induction sur m, et tenant compte du fait que Q°n est cohérent, que, pour tout m, R°n.m est cohérent.

Considérons les ensembles R°0, R°1, R°2... qui sont respectivement les sommes des ensembles R°0.0, R°0.1, R°0.2..., R°1.0, R°1.1, R°1.2..., R°2.0, R°2.1, R°2.2... .

Lemme V. Les ensembles R°0, R°1, R°2... sont cohérents.

Preuve. Par l'absurde. Soit ä une série tirée de R°n telle que ä,I soit dérivable. Soit Rm la proposition de ä dont l'indice m est le plus grand. Il est clair que toutes les propositions de ä appartiennent à R°n.m. Donc R°n.m serait incohérent contrairement à ce qui a été constaté ci-dessus.

Lemme VI. Soit p une proposition. Si p est cohérent avec $R^\circ n$, p est un élément de $R^\circ n$.
Preuve. Soit m l'indice de p dans la série R1,R2,R3 ... Si p est cohérent avec $R^\circ n$ il est cohérent avec $R^\circ n.m\text{-}1$. Dès lors on a par définition que $R^\circ n.m = R^\circ n.m—1 + p$. Donc p est un élément de $R^\circ n$.

Lemme VII. Si p est une proposition couverte et si p appartient à un ensemble $R^\circ n$, pour tout m il appartient à $R^\circ m$.
Preuve. Soit i l'indice de p dans la série R1,R2,R3 .... Si p appartient à $R^\circ n$ c'est que p était cohérent avec $R^\circ n.i—1$. Mais $R^\circ n.i—1$ contient H°. Donc p est cohérent avec H° et en vertu du lemme III p est un élément de H°. Dès lors, en vertu de la manière dont sont définis les ensemble $R^\circ 0, R^\circ 1, R^\circ 2$... p est un élément de chacun de ces ensembles.

30. Donnons-nous un univers U comportant un ensemble infini dénombrable d'individus et un ensemble infini dénombrable de mondes.
Établissons une correspondance biunivoque entre les variables pour individus et les individus de U.
Établissons une correspondance biunivoque entre les ensembles $R^\circ 0$, $R^\circ 1$, $R^\circ 2$ ... et les mondes de U.
Considérons l'ensemble des prédicats intensionnels qui nous sont donnés par U. Pour tout nombre naturel n nous établirons une correspondance entre les variables pour prédicats à n places et certains prédicats intensionnels à n places de manière telle qu'à chaque variable correspond un seul prédicat, sans exclure la possibilité qu'à un prédicat corresponde plusieurs variables.
Si p est une variable pour propositions nous faisons correspondre à p le prédicat intensionnel à 0 place P qui prend la valeur «vrai» pour les mondes correspondant aux ensembles Rn dont p fait partie et qui prend la valeur «faux» pour les autres mondes.
Si b est une variable pour prédicats à n places ($n \neq 0$) nous faisons correspondre à b le prédicat intensionnel à n places B qui, quand on lui donne comme arguments un monde M et les individus X1 ,... ,Xn (non nécessairement distincts), prend la valeur «vrai» ou «faux» d'après que la proposition bxl...xn appartient ou n'appartient pas à l'ensemble Rm, l'ensemble Rm étant celui qui correspond au monde M et les variables xl ,... ,xn étant celles correspondant aux individus X1,...,Xn respectivement.
Considérons l'ensemble des prédicats intensionnels de U que

nous avons fait correspondre à des variables du langage L. Cet ensemble de prédicats constitue avec l'ensemble d'individus et l'ensemble de mondes de U un quasi-univers Q tiré de U.

De plus le système de correspondances établi constitue un système de valeurs S relatif à Q. Il est toutefois clair que le quasi-univers Q permet d'établir encore d'autres systèmes de valeurs que S.

31. *Lemme VIII.* Soit le quasi-univers Q et le système de valeurs S relatif à Q définis ci-dessus. Soit M un monde de Q correspondant à l'ensemble R°m. Soit p une proposition. Alors p est quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS d'après que p appartient ou n'appartient pas à R°m.

Preuve par induction sur la construction de p. (Voir toutefois la remarque à la fin du présent paragraphe).

Si p est une proposition élémentaire le lemme résulte de la manière dont des correspondances ont été établies entre les variables du langage L et le quasi-univers Q.

Si p a la forme Ng et si p appartient à R°m, g n'appartient pas à R°m car sinon R°m serait incohérent. Donc g est quasi-faux pour QMS et dès lors Ng est quasi-vrai pour QMS.

Si p, c.a.d. Ng n'appartient pas à R°m, g appartient à R°m. Car sinon il faudrait en conclure que Ng et g sont incohérents avec R°m. On aurait donc des séquences dérivables Ng,ä,I et g,ä'I où ä et ä' sont des séquences tirées de R°m. Soit ä" = ä' + ä. On aura Ng,ä",I et g,ä",I. De Ng,ä",I on tire facilement ä",I,g dès lors par une césure avec g,ä",I on obtient ä",I d'où il résulterait que R°m est incohérent. Si g appartient à R°m, g est quasi-vrai pour QMS et donc Ng est quasi-faux pour QMS.

Si p a la forme Kgj et si p appartient à R°m, g et j appartiennent à R°m. En effet Kgj,I,g, et Kgj,I,j sont dérivables. Donc g et j sont cohérents avec R°m et dès lors appartiennent à R°m. Donc g et j sont quasi-vrais pour QMS et donc Kgj est quasi-vrai pour QMS.

Si p, c.a.d. Kgj n'appartient pas à R°m, g et j ne peuvent appartenir tous deux à R°m car sinon, la séquence g,j,I,Kgj étant dérivable, Kgj appartiendrait à R°m. Une des deux propositions g et j n'appartient pas à R°m et dès lors elle est quasi-fausse pour QMS. Donc Kgj est quasi-faux pour UMS.

Si p a la forme Agj et si p appartient à R°m, une des propositions doit appartenir à R°m, car sinon Ng et Nj appartiendraient à R°m et comme on a Ng,Nj,Agj,I, R°m serait incohérent.

La proposition g ou j qui appartient à R°m est quasi-vraie pour QMS et dès lors Agj est quasi-vrai pour QMS.

Si p, c.a.d. Agj n'appartient pas à R°m, g et j n'appartiennent pas à R°m, car sinon, comme g,I,Agj et j,I,Agj sont dérivables Agj appartiendrait à R°m. Donc g et j sont quasi-faux pour QMS et dès lors Agj est quasi-faux pour QMS.

Si p a la forme Cgj et si p appartient à R°m, j doit appartenir à R°m où g doit ne pas appartenir à R°m, car sinon g et Nj appartiendraient à R°m et comme Nj,g,Cgj,I est dérivable R°m serait incohérent. Si j appartient à R°m, j est quasi-vrai pour QMS ou si g n'appartient pas à R°m, g est quasi-faux pour QMS et dans les deux cas Cgj est quasi-vrai pour QMS.

Si p, c.a.d. Cgj n'appartient pas à R°m, j doit ne pas appartenir à R°m et g doit appartenir à R°m, car sinon j ou Ng appartiendrait à R°m et comme j,I,Cgj et Ng,I,Cgj sont dérivables Cgj appartiendrait à R°m. Donc j est quasi-faux pour QMS et g est quasi-vrai pour QMS et dès lors Cgj est quasi-faux pour QMS.

Si p a la forme Egj et si p appartient à R°m, g et j doivent appartenir à R°m ou g et j doivent ne pas appartenir à R°m. Car si une de ces propositions appartenait à R°m et si l'autre n'y appartenait pas on aurait par exemple que g et Nj appartiennent à R°m. Or Nj,g,Egj,I est dérivable. Il suit que g et j sont tous deux quasi-vrais pour QMS ou que g et j sont tous deux quasi-faux pour QMS et dès lors Egj est quasi-vrai pour QMS.

Si p, c.a.d. Egj n'appartient pas à R°m, une des propositions g et j doit appartenir à R°m et l'autre ne pas y appartenir. En effet, si les deux propositions appartiennent à R°m on a que g,j,I,Egj est dérivable, et si aucune des deux propositions n'appartient à R°m, Ng et Nj appartiennent à R°m et Ng,Nj,I,Egj est dérivable. Donc une des deux propositions g et j est quasi-vraie pour QMS et l'autre est quasi-fausse pour QMS, et dès lors Egj est quasi-faux pour QMS.

Si p a la forme Pvg et si p appartient à R°m, alors, pour tout système de valeurs S' qui donne à toutes les variables autres que v la même valeur que S, g est quasi-vrai pour QMS'. En effet soit X l'entité (individu ou prédicat) que S' fait correspondre à la variable v et soit a la variable du même type que v que S fait correspondre à X. Deux hypothèses peuvent se présenter d'après que Zv(g)a est une paraproposition bien formée ou non.

Si Zv(g)a est bien formée, soit j sa résultante. Alors comme Pvg,I,j est dérivable, j appartient à R°m et est donc quasi-vrai pour QMS. Mais en vertu des théorèmes V, VII ou VIII, j a pour QMS la valeur que g a pour QMS'. Donc g est quasi-vrai pour QMS'.

Si Zv(g)a n'est pas bien formée c'est que v se trouve à l'état libre dans g dans le champ d'application de quantificateurs Pa ou Sa. Soit g' la proposition que l'on obtient en remplaçant dans g la variable a partout où elle se rencontre à l'état lié par une variable de même type c qui ne se rencontre pas dans Pvg, ni dès lors dans g à l'état libre ou lié. Pvg,I,Pvg' est dérivable et dès lors Pvg' est un élément de R°m. De plus Zv(g')a est bien formé et dès lors, si j' est sa résultante, Pvg',I,j' est dérivable et j' est un élément de R°m et donc quasi-vrai pour QMS. Il s'ensuit en vertu du raisonnement développé ci-dessus que g' est quasi-vrai pour QMS'. Mais en vertu du théorème IX g et g' ont la même valeur pour QMS'. Donc g est quasi-vrai pour QMS'.

Puisque, pour tout système de valeurs S' qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S' g est quasi-vrai pour UMS' il s'ensuit que Pvg est quasi-vrai pour UMS.

Si p, c.a.d. Pvg, n'appartient pas à R°m il y a un système de valeurs S' qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S tel que g est quasi-faux pour QMS'. En effet si Pvg n'appartient pas à R°m, NPvg appartient à R°m et, comme NPvg, I, SvNg est dérivable, SvNg appartient à R°m. Or R°m contient une proposition de la forme CSvNgNg' ou g' = Zv(g)a, cette para-proposition étant bien formée. Il s'ensuit que Ng' appartient à R°m puisque SvNg, CSvNgNg', I, Ng' est dérivable. Donc Ng' est quasi-vrai pour QMS et g' est quasi-faux pour QMS. Soit S' le système de valeurs qui donne à v la valeur que S donne à a et qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S. On a que g a la même valeur pour QMS' que g' pour QMS. Donc g est quasi-faux pour UMS'. Il s'ensuit que Pvg est quasi-faux pour QMS.

Si p a la forme Svg et si p appartient à R°m, alors il y a un système de valeurs S' qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S tel que g est quasi-vrai pour QMS'. (Nous laissons la preuve au lecteur qui pourra s'inspirer de la preuve donnée ci-dessus pour le cas ou p a la forme Pvg et n'appartient pas à R°m.) Il s'ensuit que Svg est quasi-vrai pour QMS.

Si p, c.a.d. Svg n'appartient pas à R°m ; alors pour tout système de valeurs S' qui donne à toutes les variables autres que v la même valeur que S, g est quasi-faux pour QMS'. (Nous laissons la preuve au lecteur qui pourra s'inspirer de la preuve donnée ci-dessus pour le cas où p a la forme Pvg et appartient à $R^{\circ}m$). Il s'ensuit que Svg est quasi-faux pour QMS .

Si p a la forme Lg et si p appartient à $R^{\circ}m$, comme Lg , I , g est dérivable, g appartient à $R^{\circ}m$ et g est quasi-vrai pour QMS . De plus, en vertu du lemme VII pour tout nombre m',Lg appartient à $R^{\circ}m'$. Il s'ensuit que pour tout monde M'g est quasi-vrai pour QM'S et que dès lors Lg est quasi-vrai pour QMS .

Si p , c.à.d. Lg n'appartient pas à $R^{\circ}m$, NLg appartient à $R^{\circ}m$ et, comme NLg,I,MNg est dérivable MNg appartient à $R^{\circ}m$. De plus pour tout nombre m' MNg appartiendra à $R^{\circ}m'$. Supposons que la proposition MNg soit la proposition Bm' (voir paragraphe 25). Alors la proposition KMyCMNgNg est la proposition Fm'.0 et elle fait partie de l'ensemble $R^{\circ}m'$. Comme on a que KMyCMNgNg , MNg ,I, Ng est dérivable, Ng est un élément de $R^{\circ}m'$. Il s'ensuit que si M' est le monde correspondant à $R^{\circ}m'$ g est quasi-faux pour QM'S et dès lors Lg est quasi-faux pour QMS .

Si p a la forme Mg et appartient à $R^{\circ}m$, il y a un monde M' tel que g est quasi-vrai pour QM'S . (Nous laissons la preuve au lecteur qui pourra s'inspirer de la preuve donnée ci-dessus pour le cas où p a la forme Lg et n'appartient pas à $R^{\circ}m$). Il s'ensuit que Mg est quasi-vrai pour QMS .

Si p , c.a.d. Mg n'appartient pas à $R^{\circ}m$, alors NMg appartient à $R^{\circ}m$ et comme NMg , I , LNg est dérivable LNg fait partie de $R^{\circ}m'$ pour tout nombre m' . Il s'ensuit que Ng fait partie de tout ensemble $R^{\circ}m'$ et que dès lors pour tout monde M' , g est quasi-faux pour QM'S d'où il suit que Mg est quasi-faux pour QMS .

Remarque. La preuve n'est pas faite à proprement parler par induction sur la construction de p mais par induction sur des classes de propositions de structure identique. Deux propositions sont dites de structure identique si elles peuvent être obtenues l'une de l'autre par des substitutions de variables libres ou liées. C'est ainsi que dans le cas par exemple où p a la forme Pvg et où p appartient à $R^{\circ}m$ nous supposons le lemme prouvé non seulement pour g mais aussi pour Zv(g)a . Notons de plus que par exemple dans le cas où p a la forme Pvg et n'appartient pas à $R^{\circ}m$ nous supposons le lemme prouvé non seulement pour g' (g' = Zv(g)a) mais aussi pour Ng' . Ceci est évidemment permis par le fait que nous avons déjà prouvé plus haut que si le lemme est vrai pour g' il est vrai pour Ng' .

32. *Lemme IX*. La proposition y est quasi-réalisable dans le quasi-univers Q .

Preuve. Supposons que My soit la proposition Bm (voir paragraphe 25). Alors KMyCMy y est la proposition Fm.O et elle fait partie de l'ensemble R°m. Or comme on a KMyCMyy, I, y, il suit que y fait partie de R°m et est donc quasi-vrai pour QMS, où M est le monde correspondant à R°m.

33. *Lemme* X. Le quasi-univers Q est régulier.

Preuve. Pour un nombre m quelconque toute proposition dérivable fait partie de R°m. Donc toute proposition dérivable est réalisable dans Q. En vertu des théorèmes X et XI Q est régulier.

Ceci achève la preuve du théorème XIII puisque nous avons prouvé que si y est une proposition irréfutable il existe un quasi-univers régulier Q dans lequel y est quasi-réalisable.

V. *Adéquation de S5,1.*

34. Revenons aux données suivantes: 1°) le langage S5,1 défini dans CLM,23; 2°) les définitions sémantiques de CLM,3 et 4 qui, comme il a été dit dans CLM,24, sont applicables au langage de S5,1; 3°) les théorèmes I, II et IV de CLM, adaptés comme il a été dit dans CLM,26 au langage de S5,1; 4°) un théorème sémantique (et non quasi-sémantique) analogue au théorème IX du présent article; pour S5,1 les variables v et w de ce théorème sont des variables pour individus; 5°) le système déductif S5,1 défini dans CLM,27.

Nous définissons comme au paragraphe 17 du présent article les notions «proposition dérivable» dans S5,1» et «représentante d'une séquence ä, I, ë». Les remarques faites au paragraphe 17 s'appliquent également à S5,1. Enfin nous donnons pour S5,1 les mêmes définitions et nous faisons les mêmes remarques que dans les paragraphes 23 et 24 du présent article.

35. Nous construisons avec les propositions du langage de S5,1 des ensembles et des séries de propositions analogues aux ensembles et series définies dans les paragraphes 25 à 29 du présent article. Les lemmes I à VII se prouveront de la même manière que dans ces paragraphes.

36. Nous nous donnons un univers U et nous établissons les correspondances décrites dans le paragraphe 30 du présent article. Nous pouvons toutefois nous dispenser de considérer le quasi-univers Q qui contient exactement les prédicats intensionnels auxquels on a fait correspondre des variables pour prédicats. Le lemme VIII s'énonce alors comme suit:

Lemme VIII. Soit l'univers U et le système de valeurs S relatif à U définis ci-dessus. Soit M un monde de U correspondant à l'ensemble $R^{o}m$. Soit p une proposition. Alors p est vrai ou faux pour UMS d'après que p appartient ou n'appartient pas à $R^{o}m$.

La preuve se fait comme au paragraphe 31. Nous obtenons la vérité et la fausseté de p et non la quasi-vérité et la quasi-fausseté parce que nous n'avons pas de quantificateurs du second ordre dans le langage de S5,1. En effet si l'on examine la série de définitions quasi-sémantiques données au paragraphe 3 du présent article pour les notions «quasi-vrai» et «quasi-faux» on constate que pour le langage de S5,1 ces notions sont équivalentes aux notions de «vrai» et de «faux». En effet, pour le langage de S5,2 les définitions du quasi-vrai et du quasi-faux ne diffèrent de celles du vrai et du faux que pour les propositions de la forme Pvp et Svp où v est une variable pour propositions ou pour prédicats. Cette différence provient du fait que l'on ne considère pas tous les prédicats intensionnels que nous nous donnons en nous donnant un univers U, mais uniquement les prédicats intensionnels que nous retenons dans le quasi-univers Q que nous tirons de U. Il s'ensuit que pour le langage de S5,2 une proposition qui contient des quantificateurs du second ordre peut être quasi-vraie ou quasi-fausse pour QMS sans être respectivement vraie ou fausse pour UMS et inversément. L'absence de quantificateurs du second ordre dans le langage de S5,1 fait disparaître cette différence.

Il s'ensuit que nous pourrions procéder comme suit. Nous appliquerions les définitions quasi-sémantiques du paragraphe 3 (non celles du paragraphe 4) au langage de S5,1. Nous considérerions dans le lemme VIII le quasi-univers Q et non l'univers U. Nous prouverions comme au paragraphe 31 que p est quasi-vrai ou quasi-faux pour QMS d'après que p appartient ou n'appartient pas à $R^{o}m$. Nous en déduirions que p est vrai ou faux pour UMS d'après que p appartient ou n'appartient pas à $R^{o}m$, ce qui est l'énoncé du lemme VIII relatif à S5,1 tel qu'il a été formulé ci-dessus.

37. On démontre alors comme au paragraphe 32 le

Lemme IX La proposition y est réalisable dans l'univers U. Le lemme X tombe et l'ensemble des lemmes I à IX démontrent pour S5,1 le

Théorème XV. Si p est une proposition irréfutable dans S5,1 p est réalisable.

D'où l'on tire le

Théorème XVI. S5,1 est adéquat.

38. Il nous a été possible d'adapter la méthode de preuve de Henkin à S5,2 et S5,1. On pourrait songer à tâcher d'adapter la méthode de preuve de Gödel à S5,1. On se heurterait alors à la difficulté qui résulte du fait que la méthode de Gödel repose sur la technique des formules prénexes, et que l'on ne dispose pas de cette technique en logique modale.