Logique & Analyse **167–168** (1999), 341–359

LA VÉRITABLE PORTÉE DU THÉORÈME DE LINDENBAUM-ASSER

JEAN-YVES BÉZIAU*

Abstract
There are various versions of Lindenbaum extension lemma, one of them is Lindenbaum-Asser theorem. The aim of this paper is to show that this theorem is the most fundamental version for proving general completeness.

In case of logics in which there are "excessive theories" which are not maximal, the Lindenbaum-Asser theorem is the only correct tool. That is what can be seen from a theorem presented here, saying that excessive theories form a minimal semantic.

Various versions of Lindenbaum lemma are studied. We draw a general picture of the relations between them, the completeness theorem, the axiom of choice and compactness —at the abstract level.

Finally we show that logics in which all excessive theories are maximal are exactly "maximal" logics.

Remarques sur l'origine du théorème de Lindenbaum-Asser

Le sujet du présent article est un théorème connu sous le nom de théorème de Lindenbaum-Asser, ou encore: théorème de Lindenbaum-Łoŝ, théorème de Lindenbaum-Łoŝ-Asser.

De quoi s'agit-il? Tout le monde a entendu parler du théorème de Lindenbaum, plus souvent appelé lemme de Lindenbaum ou encore lemme d'extension de Lindenbaum (*Lindenbaum extension lemma*). Le qualificatif "lemme" lui étant attribué eu égard à son utilisation dans la preuve de différents théorèmes de complétude.

*Travail réalisé grâce à une bourse du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique et de l'Académie Suisse des Sciences Techniques. L'auteur tient à remercier N.C.A. da Costa, D.W. Miller et J. Zygmunt pour de nombreux commentaires utiles.

Ce résultat de Lindenbaum a de nombreuses versions, nous allons exposer ici plusieurs résultats qui montrent pourquoi la version de Lindenbaum-Asser est la plus fondamentale.

Le théorème de Lindenbaum est dû au logicien polonais Adolf Lindenbaum. On connait peu de chose sur la présentation originale du résultat ainsi que sur l'oeuvre et la vie de son auteur: on ne sait ni quand il naquit, ni quand il mourut. Des informations à son sujet ont été regroupées par S. J. Surma [1982] [1974]. D'après S. J. Surma [1982], le résultat de Lindenbaum a été exposé pour la première fois par Tarski [1930]. Ce résultat a été utilisé notamment par Gödel [1932] (indépendamment?), Henkin [1949] et Łos [1951].

Tout d'abord il est fondamental de distinguer la forme abstraite et les différentes versions "concrètes" de ce théorème. Forme abstraite veut dire indépendante de tout langage spécifique, telle que présentée au niveau de la théorie de la conséquence pure promue par Tarski [1928]. La forme abstraite, sans condition de cardinalité, est équivalente à l'axiome du choix comme l'a montré Dzik [1981]. Sa forme particulière (logique classique), sans condition de cardinalité, est équivalente à l'axiome de l'idéal premier, et au théorème de complétude pour la logique propositionnelle ou de premier ordre (voir Dzik [1981]) qui, comme on le sait, sont strictement plus faibles que l'axiome du choix.

Il est difficile de dire si Lindenbaum a eu l'idée de la forme la plus abstraite. Quoiqu'il en soit c'est seulement dans Asser [1959] que l'on en trouve une formulation très générale. C'est dans le même ouvrage que l'on trouve aussi la distinction entre deux formes fondamentales du théorème de Lindenbaum. Cette distinction s'instaure aussi bien au niveau abstrait que dans les cas particuliers. Dans Pogorzelski et Wojtylak [1982] on trouve de nombreux résultats au sujet de ces théorèmes.

Dans la présente étude nous allons nous situer au niveau purement abstrait. Notre langage diffère quelque peu de celui des "opérateurs de la conséquence". Le concept introduit par Asser, dans le théorème de Lindenbaum-Asser, est celui d'ensemble relativement complet ("vollständig in bezug auf") qui a été traduit en anglais par les polonais par "relatively maximal" (cf e.g. Wójcicki [1988]). En effet cette notion, comme nous le verrons, est à comprendre par rapport à la notion d'ensemble maximal. Cependant nous n'avons pas repris cette terminologie pour des raisons pratiques, car elle est assez lourde. A partir des années soixante-dix, ce concept a été utilisé au Brésil sous le nom d'ensemble saturé (cf Loparic [1977], Loparic et da Costa [1984], da Costa et Béziau [1994]). Cette terminologie est un peu gênante, car le terme "saturé" est couramment utilisé en théorie des modèles dans une autre acceptation.

Ce qui est important dans l'affaire, quelque soit la façon dont on nomme ces ensembles, c'est la distinction essentielle entre eux et leurs congénères purement maximaux. C'est notamment ce que nous allons montrer ici: la notion d'ensemble maximal est en général inadéquate et c'est son alter ego qui prend le pas, d'où l'importance du théorème de Lindenbaum-Asser qui l'assujettit alors que le théorème de Lindenbaum ne concerne que les ensembles maximaux.

1. *Le théorème de Lindenbaum-Asser: un récapitulatif*

Concepts préliminaires

On appelle *logique* une structure $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}; \vdash \rangle$ où $\vdash$ est une relation sur $\mathcal{P}(\mathbb{L})\mathrm{X}\mathbb{L}$.

On appelle *théorie* une partie T de $\mathbb{L}$. Une théorie est dite limitée si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{L}$ tel que $T \nvdash a$. Une théorie T est dite *excessive en* a ou plus brièvement a-*excessive* (c'est ainsi que nous traduisons "vollständig in bezug auf a") si et seulement si elle est a-limitée et $T, b \vdash a$ pour tout $b \notin T$. Une théorie T est dite *excessive* si et seulement s'il existe a tel que T soit a-excessive.

Une *logique* est dite *normale* si et seulement si elle vérifie les trois lois suivantes:

- loi d'autodéductibilité [A]
  $a \vdash a$
- loi de monotonie infinie [M∞]
  $(T \vdash a$ et $T \subseteq U) \Rightarrow U \vdash a$
- loi du syllogisme infinie [Y∞]
  $((T \vdash x$ pour tout $x \in U)$ et $U \vdash b) \Rightarrow T \vdash b$.

On considère de plus la loi suivante:

- loi de compacité déductive [CD]

Soient T et a tels que $T \vdash a$, alors il existe une sous-théorie finie T_o de T telle que $T_o \vdash a$.

Les logiques dans lesquelles CD vaut sont dites *logiques déductivement compactes*.

Le théorème

On est à présent en mesure d'énoncer le théorème de Lindenbaum-Asser:

THEOREME (LINDENBAUM-ASSER) *Dans une logique normale déductivement compacte toute théorie* a*-limitée peut être étendue en une théorie* a*-excessive.*

En fait on peut prouver ce théorème en utilisant seulement la monotonie [M∞] et la compacité déductive [CD], nous avons donc le théorème simplifié suivant:

THEOREME *Dans une logique monotone déductivement compacte toute théorie* a*-limitée peut être étendue en une théorie* a*-excessive.*

Preuve. Soit T a-limitée, et $\mathrm{EXTLIM}(a)[T]$, l'ensemble des extensions a-limitées de T. On montre d'abord que $\mathrm{EXTLIM}(a)[T]$ est clos par union de chaîne: soit U l'union d'une chaîne $\mathcal{C}$ de $\mathrm{EXTLIM}(a)[T]$, supposons que $U \vdash a$, alors par la loi de compacité déductive, il existe une sous-théorie finie U_o de U, telle que $U_o \vdash a$, comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, il existe alors un élément V de cette chaîne qui contient U_o, alors par monotonie, $V \vdash a$, ce qui est absurde car $V \in \mathrm{EXTLIM}(a)[T]$.

Par le lemme de Zorn, $\mathrm{EXTLIM}(a)[T]$ a donc un élément maximal. Montrons qu'un élément maximal M de $\mathrm{EXTLIM}(a)[T]$ est une théorie a-excessive. Soit $b \in M$, supposons que $M \cup \{b\} \vdash a$, donc $M \cup \{b\} \in \mathrm{EXTLIM}(a)$ $[T]$ et c'est une extension stricte de M, cela contredit alors la maximalité de M.

W. Dzik [1981] a montré que le théorème de Lindenbaum-Asser est équivalent à l'axiome du choix. La forme simplifiée l'est donc également.

Corollaire du théorème: la complétude

Du théorème de Lindenbaum-Asser on déduit immédiatement un théorème de complétude. C'est ce que nous allons expliquer à présent.

On appelle *sémantique bivalente* pour une logique $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}; \vdash \rangle$, un ensemble de fonctions BIV de $\mathbb{L}$ dans $\{0, 1\}$. Remarquons que l'on peut facilement assimiler une classe de théories à une sémantique bivalente, en considérant les fonctions caractéristiques. La *logique* $\langle \mathbb{L}; \vdash_{\mathrm{BIV}} \rangle$ *induite par une sémantique bivalente* BIV pour une logique $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}; \vdash \rangle$ est définie comme suit:

$$T \vdash_{\mathrm{BIV}} a \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathrm{BIV}(\beta(T) = 1 \Rightarrow \beta(a) = 1).$$

où $\beta(T) = 1$ signifie $\beta(x) = 1$ pour tout $x \in T$.

Une sémantique BIV pour une logique $\mathcal{L}$ est dite complète si et seulement si:

$$T \vdash_{\mathrm{BIV}} a \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{L}} a.$$

On peut donc maintenant énoncer le corollaire du théorème de Lindenbaum-Asser:

COROLLAIRE (COMPLETUDE DE EXC) *Pour toute logique normale déductivement compacte, la classe des théories excessives constitue une sémantique complète*:
$\mathcal{L}$ est normale et déductivement compacte $\Rightarrow (T \vdash_{\mathrm{EXC}} a \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{L}} a)$.

Preuve. Supposons $T \nvdash_{\mathcal{L}} a$, c'est dire que T est a-limitée. Par le théorème de Lindenbaum-Asser, il existe donc une extension excessive T' de T qui est a-limitée. La fonction caractéristique de T' donne la valeur 1 à tous les éléments de T et la valeur 0 à a (en effet si a appartenait à T', par la loi d'autodéductibilité, a serait déductible de T'), donc $T \nvdash_{\mathrm{EXC}} a$.

2. *Le théorème de minimalité*

On va prouver maintenant le résultat qui montre toute l'importance du théorème de Lindenbaum-Asser.

Tout d'abord quelques notions préliminaires.

On dit qu'une sémantique BIV est *adéquate* pour une logique $\mathcal{L}$, si, en plus d'être complète, elle est *fiable*, fiabilité voulant dire: $T \vdash_{\mathcal{L}} a \Rightarrow T \vdash_{\mathrm{BIV}} a$. On dit qu'une théorie est *close* lorsque elle contient tout ce que l'on peut en déduire: $T \vdash_{\mathcal{L}} a \Rightarrow a \in T$. Il est très facile de voir qu'étant donné une logique normale $\mathcal{L}$ quelconque, la classe des théories closes constitue une sémantique fiable pour cette logique et que toute réduction de cette sémantique est également fiable. Comme on voit sans peine que toute théorie excessive est close, on conclut donc que EXC est une sémantique fiable pour tout logique normale.

Etant donné une logique normale déductivement compacte $\mathcal{L}$, on a le théorème suivant:

THEOREME (MINIMALITE DE EXC) *Si une sémantique est strictement plus petite que* EXC *alors cette sémantique n'est pas complète*:

$$\mathrm{BIV} \subset \mathrm{EXC} \Rightarrow \exists T\ \exists a\ T \nvdash_{\mathcal{L}} a \text{ et } T \vdash_{\mathrm{BIV}} a.$$

Nous commençons par prouver deux lemmes.

LEMME 1 *Soit* BIV *une sémantique adéquate pour une logique* $\mathcal{L}$, *si pour tout* β *de* BIV, *il existe* T *et* a *tels que* β *soit l'unique élément de* $\mathbb{B}$ *tel que* $\beta(T) = 1$ *et* $\beta(a) = 0$, *alors* BIV *est un élément minimal de la classe des* *sémantiques complètes pour $\mathcal{L}$.*

Preuve. Soient une logique $\mathcal{L}$ et BIV_1 une sémantique adéquate pour $\mathcal{L}$ vérifiant les conditions du lemme et soit $\mathrm{BIV}_2 \subset \mathrm{BIV}_1$. Soit alors β telle que $\beta \in \mathrm{BIV}_1$ et $\beta \notin \mathrm{BIV}_2$ et soient T et a tels que β soit l'unique élément de BIV_1 tel que $\beta(T) = 1$ et $\beta(a) = 0$, alors $T \nvdash_{\mathrm{BIV}_1} a$ et $T \vdash_{\mathrm{BIV}_2} a$, donc $T \nvdash_{\mathcal{L}} a$ et $T \vdash_{\mathrm{BIV}_2} a$, c'est dire que BIV_2 n'est pas complète.

Remarque. La converse de ce lemme vaut aussi.

LEMME 2 *Si une théorie est a-excessive, elle n'admet pas d'extension stricte a-excessive.*

Preuve. Soit T a-excessive, supposons qu'il existe une extension stricte T' de T qui soit a-excessive. Soit b tel que $b \in T'$ et $b \notin T$, $T, b \vdash a$, donc comme $T \cup \{b\} \subseteq T'$, par monotonie, $T' \vdash a$, ce qui est absurde.

Preuve du théorème. Soit β_T la fonction caractéristique d'une théorie T a-excessive, alors on a: $\beta_T(T) = 1$ et $\beta_T(a) = 0$. Supposons qu'il existe une fonction $\beta'_{T'}$ différente de β_T et qui est la fonction caractéristique d'une théorie excessive T' telle que $\beta'_{T'}(T) = 1$ et $\beta'_{T'}(a) = 0$. Comme $\beta'_{T'}$ est différente de β_T il existe donc b tel que $\beta'_{T'}(b) \neq \beta_T(b)$. Si $\beta_T(b) = 1$, $b \in T$ donc $\beta'_{T'}(b) = 1$, on a donc forcément $\beta'_{T'}(b) = 1$ et $\beta_T(b) = 0$. On voit donc que T' est une extension stricte a-excessive de T ce qui est impossible par le lemme 2, donc une telle fonction β' ne saurait exister, donc, par le lemme 1, EXC est minimale.

3. *Signification et conséquence du théorème de minimalité*

Pour montrer l'importance du théorème de Lindenbaum-Asser nous allons tout d'abord le comparer au théorème dit de Lindenbaum.

Le théorème de Lindenbaum

En logique classique, le théorème de Lindenbaum s'énonce: *toute théorie consistante a une extension maximale consistante*. Au niveau abstrait nous dirons qu'une théorie est *maximale* lorsqu'elle est maximale relativement à la classe des théories limitées, ordonnée par la relation d'inclusion (la notion de négation n'intervient donc pas).

Nous considérons maintenant une autre loi de compacité, qui dans le cas de la logique classique est équivalente à la première (mais ce n'est pas le cas en général comme nous le montrerons plus loin):

- loi de compacité limitative [CL]

Si toutes les sous-théories finies de T sont limitées, alors T est limitée.

(Il convient en particulier de ne pas confondre CL avec la contraposé de CD: Si toutes les sous-théories finies de T sont a-limitées, alors T est a-limitée.)

Une logique dans laquelle CL vaut est dite *logique limitativement compacte*.

Le théorème de Lindenbaum s'énonce alors ainsi:

THEOREME (LINDENBAUM) *Dans une logique normale limitativement compacte toute théorie limitée peut être étendue en une théorie maximale.*

Le principe de sa preuve est similaire à celui du théorème de Lindenbaum-Asser. Il peut être également simplifié de la façon suivante:

THEOREME *Dans une logique monotone limitativement compacte toute théorie limitée peut être étendue en une théorie maximale.*

Preuve. Soit T limitée, et $\mathrm{EXTLIM}[T]$, l'ensemble des extensions limitées de T. On montre d'abord que $\mathrm{EXTLIM}[T]$ est clos par union de chaîne: soit U l'union d'une chaîne $\mathcal{C}$ de $\mathrm{EXTLIM}[T]$, supposons que U soit illimitée, alors par la loi de compacité limitative, il existe une sous-théorie finie U_o de U illimitée, comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, il existe alors un élément V de cette chaîne qui contient U_o, alors par monotonie, V doit être illimitée, ce qui est absurde car $V \in \mathrm{EXTLIM}[T]$.

Par le lemme de Zorn, $\mathrm{EXTLIM}[T]$ a un élément maximal. Montrons qu'un élément maximal M de $\mathrm{EXTLIM}[T]$ est une théorie maximale. Soit $a \notin M$, supposons que $M \cup \{a\}$ soit limitée, donc $M \cup \{a\} \in \mathrm{EXTLIM}[T]$ et est une extension stricte de M, cela contredit alors la maximalité de M.

Le théorème de Lindenbaum est également équivalent à l'axiome du choix (cf Dzik [1981]).

Les théorèmes de Lindenbaum et de Lindenbaum-Asser sont donc équivalents. Cependant cette équivalence ne doit pas nous leurrer au sujet de leurs significations respectives qui sont bien différentes.

Trois différences essentielles

Il est facile de voir que dans une logique normale toute théorie maximale est excessive (en fait une théorie est maximale si et seulement si elle est a-excessive pour tout a qui ne lui appartient pas). Dans le cas d'une logique dans laquelle il y a des théories excessives qui ne sont pas maximales, en vertu de notre théorème de minimalité de EXC, la sémantique MAX constituée par les fonctions caractéristiques des théories maximales est donc incomplète.

Or il y a de nombreuses logiques dans lesquelles $\mathrm{EXC} \neq \mathrm{MAX}$, c'est le cas notamment de la logique intuitionniste, de la logique relevante (ce fait nous a été signalé par R. Sylvan), etc...

En second lieu, généralement la loi de compacité qui est valide dans une logique est la loi de compacité déductive: dans le cas où la logique est induite par un système de déduction usuel, avec règles de déduction et démonstrations finitaires. Par contre rien ne garantit que la loi de compacité limitative soit valable et, comme nous le verrons, on ne peut pas prouver en général le théorème de Lindenbaum en utilisant CD à la place de CL. Donc même au cas où $\mathrm{EXC} = \mathrm{MAX}$ c'est le théorème de Lindenbaum-Asser qui s'impose.

Troisièmement, imaginons même que l'on se trouve dans un cas particulier où l'on puisse prouver le théorème de Lindenbaum grâce à CD et que $\mathrm{EXC} = \mathrm{MAX}$, cela n'est pas encore suffisant pour garantir la complétude. Car, dans ce cas, pour avoir la complétude, il faut non seulement qu'une théorie T puisse être étendue en une théorie maximale, mais aussi que pour tout a tel que T soit a-limitée, il existe une extension maximale a-limitée de T (ce que nous appellerons une théorie a-maximale). Or, comme nous allons le prouver, ce n'est pas la même chose.

En général, étant donné une classe de théories closes SCH d'une logique $\mathcal{L}$, les théories schtroumpfes, les deux propositions suivantes ne sont pas équivalentes:

[LES] Si T est a-limitée, il existe une extension schtroumpfe de T a-limitée.

[LES#] Si T est limitée il existe une extension schtroumpfe de T limitée.

Si l'on prend la contraposé de LES:

$$T \vdash_{\mathcal{L}} a \Leftarrow a \in \cap\, \mathrm{EXTSCH}[T]$$

on voit que LES signifie exactement la complétude de SCH.

LES# est en général plus faible que LE et ne garantit donc pas la complétude.

Dans le cas notamment où schtroumpfe signifie maximale ou excessive, l'équivalence ne vaut pas, comme nous allons le voir dans la section suivante.

4. *Lindenbaumologie*

Les quatre lois de Lindenbaum

Il y a en fait quatre versions différentes et non équivalentes entre elles de la loi de Lindenbaum.

- loi de Lindenbaum-Asser faible [LEA#]
  Si une théorie est limitée elle peut être étendue en une théorie excessive.
- loi de Lindenbaum-Asser [LEA]
  Si une théorie est a-limitée elle peut être étendue en une théorie a-excessive.
- loi de Lindenbaum [LE#]
  Si une théorie est limitée elle peut être étendue en une théorie maximale.
- loi de Lindenbaum forte [LE]
  Si une théorie est a-limitée elle peut être étendue en une théorie a-maximale.

Si la loi de Lindenbaum-Asser est valide dans une logique, on dira que c'est une *logique de Lindenbaum*-Asser, etc.

De plus on dit qu'une *logique* est *finie* [FIN] si et seulement si son domaine est fini et qu'une logique est *compacte* [C] si et seulement si elle est à la fois déductivement compacte et limitativement compacte.

Les principaux résultats (évidents, prouvés ou allant l'être) concernant ces notions sont résumés dans la table qui suit (pour les logiques normales).

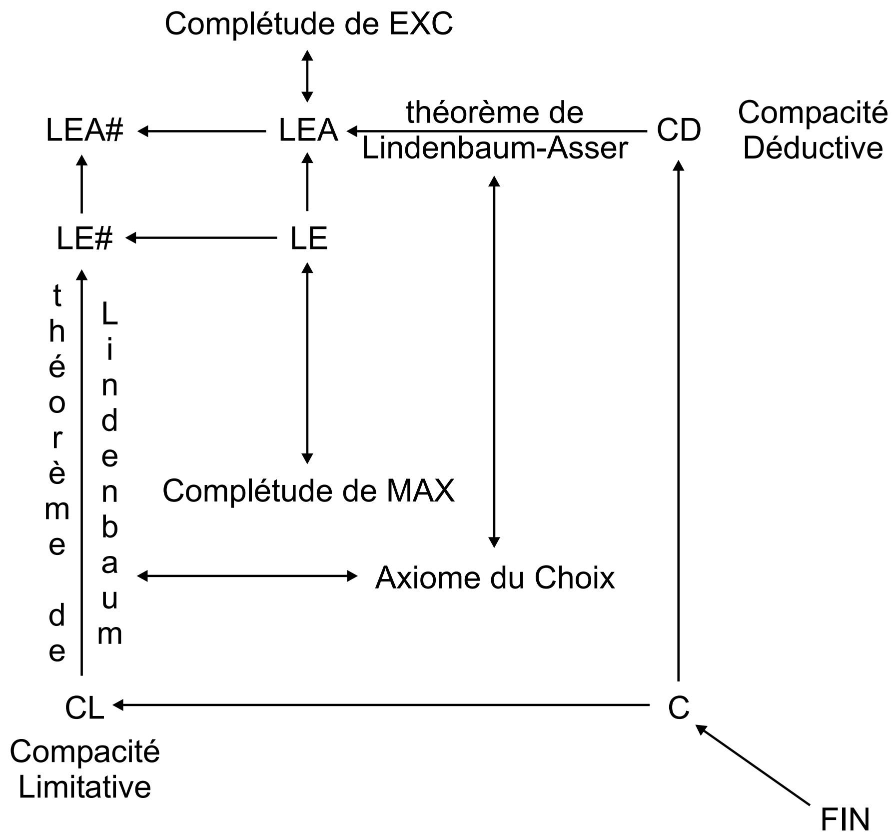
Aucune des flèches non obtenue par transivité ne correspond à une loi valide.

C'est ce que nous allons prouver à présent (les résultats positifs sont déjà connus ou bien évidents).

Nous allons prouver les quatre résultats suivants, à partir desquels on peut déduire tous les autres:

$$\begin{array}{rcl} \text{CD} & \not\Rightarrow & \text{LE\#} \\ \text{CL} & \not\Rightarrow & \text{LEA} \\ \text{LE} & \not\Rightarrow & \text{C} \\ \text{FIN} & \not\Rightarrow & \text{LE} \end{array}$$

TABLE D'ORIENTATION
Extension de Lindenbaum
Axiome du Choix
Compacité
Théorème de Complétude



Avant de commencer, remarquons que dans la définition des logiques normales on peut remplacer A et M∞ par la loi suivante:

$[\mathrm{A}\infty]$ si $a \in T$, $T \vdash a$.

THEOREME *Il existe des logiques normales déductivement compactes qui ne sont pas des logiques de Lindenbaum*:

CD $\not\Rightarrow$ LE#.

Preuve. On considère la logique $\mathcal{L}\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}; \vdash \rangle$ dont le domaine $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels et où la relation de déductibilité est définie de façon suivante:

$$\mathcal{N} \vdash_{\mathcal{L}\mathbb{N}} n \Leftrightarrow \exists m \in \mathcal{N}, m \geq n.$$

Il est évident que $\mathcal{L}\mathbb{N}$ est normale et déductivement compacte, montrons que ce n'est pas une logique de Lindenbaum. On va montrer que dans $\mathcal{L}\mathbb{N}$ il n'y a pas de théorie maximale, comme il y a des théories limitées, il sera facile de conclure.

Tout d'abord remarquons que dans $\mathcal{L}\mathbb{N}$ on a le fait suivant:

$\mathcal{N}$ est infinie $\Leftrightarrow$ $\mathcal{N}$ est illimitée.

Les théories infinies ne sont donc pas maximales. Soit donc $\mathcal{N}$ finie, il existe n tel que $\mathcal{N} \nvdash n$ (il suffit de prendre un majorant strict de $\mathcal{N}$), et on a $\mathcal{N} \cup \{n\} \nvdash n + 1$, donc $\mathcal{N}$ n'est pas maximale.

THEOREME *Il existe des logiques normales limitativement compactes qui ne sont pas des logiques de Lindenbaum-Asser*:

CL $\not\Rightarrow$ LEA.

Preuve. On considère la logique $\mathcal{L}\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}; \vdash_{\mathcal{L}\mathbb{P}} \rangle$ dont le domaine $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et où la relation de déductibilité est définie de la façon suivante:

- pour tout P,
  $P \vdash_{\mathcal{L}\mathbb{P}} 1 \Leftrightarrow 1 \in P$
- pour tout P, $p \neq 1$,
  $P \vdash_{\mathcal{L}\mathbb{P}} p \Leftrightarrow (\exists p' \in P, p'$ divise $p)$ ou $(P$ est infinie$)$.

i) $\mathcal{L}\mathbb{P}$ est normale. Il est clair que A∞ est valide. En ce qui concerne Y∞, supposons que $P \vdash P'$ et $P' \vdash p$. Si $p \in P'$, alors $P \vdash p$. Si $1 \in P'$, alors $1 \in P$, comme 1 divise p, alors $P \vdash p$. Si P' est infinie, soit P est infinie, soit $1 \in P$; dans les deux cas $P \vdash p$.

ii) $\mathcal{L}\mathbb{P}$ est limitativement compacte. Si P est illimitée, $P \vdash 1$, donc $1 \in P$, et $\{1\}$ est illimitée.

iii) La loi de Lindenbaum-Asser n'est pas valable. On a, par exemple, $0 \nvdash 13$. Montrons qu'il n'y a pas de théorie 13-excessive. Si $P \nvdash 13$, P est finie, $13 \notin T$ et $1 \notin P$. Soit p un nombre premier différent de 1 et de 13 et n'appartenant pas à P (en vertu d'un théorème célèbre, on sait que l'on peut toujours en trouver un), alors $P \cup \{p\}$ est finie et comme p ne divise ni 1, ni 13, on a $P \cup \{p\} \nvdash 13$.

THEOREME *Il existe des logiques normales de Lindenbaum fortes qui ne sont pas compactes*:

LE $\not\Rightarrow$ C.

Preuve. On va considérer ici un cas "concret", un calcul des propositions infinitaire défini sémantiquement.

On considère un langage propositionnel $\mathbb{L}$ ayant une quantité infinie dénombrable d'atomes ($ATOM = \{p_1, ..., p_n, ...\}$) et ayant deux connecteurs: un connecteur unaire $\neg$, et un connecteur d'arité infinie dénombrable $\wedge$.

On considère un ensemble de bivaluations KLI pour $\mathbb{L}$, dont chaque élément β obéit aux conditions suivantes:

- pour tout $a \in \mathbb{L}$,
  $\beta(a) = 0 \Leftrightarrow \beta(\neg a) = 1$
- pour toute famille dénombrable a_i d'élément de $\mathbb{L}$:
  $\beta(\wedge(a_i)) = 1 \Leftrightarrow \beta(a_i) = 1$ pour tout i.

(Nous simplifions volontairement, en supposant que le connecteur $\wedge$ ne tient pas compte de l'ordre de ses arguments.)

On considère la logique induite par KLI (c'est évidemment une logique normale), on va montrer que cette logique n'est pas compacte mais que la loi de Lindenbaum forte y est valide (NB la notion de maximalité sera celle induite par KLI et non une notion externe relative à une autre logique).

1) $ATOM \vdash_{\mathrm{KLI}} \wedge p_i$ (où p_i est la famille de tous les atomes), mais aucun sous-ensemble fini de $ATOM$ ne permet de déduire $\wedge p_i$, donc cette logique n'est pas déductivement compacte.

2) $ATOM \cup \{\neg(\wedge p_i)\}$ est illimitée, mais aucune sous-théorie finie de $ATOM$ ne l'est, donc cette logique n'est pas limitativement compacte.

3) La loi de Lindenbaum forte vaut dans cette logique.

Si $T \nvdash_{\mathrm{KLI}} a$, il existe donc β telle que $\beta(T) = 1$ et $\beta(a) = 0$. Montrons que T_β est a-maximale. Il est clair que $T_\beta \nvdash_{\mathrm{KLI}} a$ (les bivaluations sont toujours des fonctions caractéristiques de théories closes par rapport à la logique qu'elles induisent). Soit $b \notin T_\beta$ donc $\beta(b) = 0$, alors $\beta(\neg b) = 1$, donc $\neg b \in T_\beta$ et $\{b, \neg b\} \subseteq T_\beta \cup \{b\}$, donc aucune bivaluation ne satisfait

$T_\beta \cup \{b\}$, donc $T_\beta \cup \{b\} \vdash_{\text{KLI}} a$ pour tout a.

THEOREME *Il y a des logiques normales finies qui ne sont pas des logiques de Lindenbaum fortes*:

$$\text{FIN} \not\Rightarrow \text{LE}.$$

Preuve. On considère la logique $\mathcal{L}_o = \langle \{a, b\}; \vdash \rangle$ où la relation de déductibilité est la relation suivante:

$\{a\} \vdash a$	$\{b\} \vdash a$	$\{a, b\} \vdash a$
	$\{b\} \vdash b$	$\{a, b\} \vdash b$

On vérifie que $\mathcal{L}_o$ est normale. Maintenant montrons que la loi de Lindenbaum forte n'y est pas valable. On va voir qu'il n'y a pas de théorie a-maximale, comme $\emptyset$ est a-limitée, on aura prouvé que $\emptyset$ n'a pas d'extension a-maximale.

$\emptyset$ n'est pas maximale, car $\{a\} \nvdash b$.

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ ne sont pas a-maximales car elles ne sont pas a-limitées.

Remarques supplémentaires

On va montrer maintenant que si l'on ne suppose pas la monotonie et la compacité (la version idoine) on ne peut pas démontrer les théorèmes de Lindenbaum et de Lindenbaum-Asser.

THEOREME *Si on ne suppose pas la monotonie, les théorèmes de Lindenbaum et de Lindenbaum-Asser sont faux.*

Preuve. On considère une logique finie $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}; \vdash \rangle$ où $\mathbb{L} = \{1, 2, 3, 4\}$ et où $\vdash$ est définie comme suit:

$$\mathcal{N} \vdash n \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{L}, m \geq n.$$

Cette logique est compacte car elle est finie et on voit facilement qu'elle n'est pas monotone car, par exemple, $4 \vdash 2$ mais $\{4, 1\} \nvdash 2$.

Montrons maintenant que la loi de Lindenbaum-Asser faible n'y est pas valide. On va montrer qu'aucune théorie n'est excessive: soit $\mathcal{N}$ limitée (donc $\mathcal{N}$ n'est pas vide), et soit n, montrons que $\mathcal{N}$ n'est pas n-excessive. Supposons $\mathcal{N} \nvdash n$ (donc n est différent de 1), il existe donc $m \in \mathcal{N}$ tel que $m < n$, on voit alors facilement que si $\mathcal{N} \cup \{j\} \nvdash n$, en particulier si $j \notin \mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ n'est donc pas excessive.

THEOREME *Il y a des logiques normales qui ne sont pas des logiques de Lindenbaum-Asser faibles.*

Preuve. On considère une logique $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}; \vdash \rangle$ dont le domaine est infini et où $\vdash$ est définie comme suit:

$$T \vdash a \Leftrightarrow a \in T \text{ ou } T \text{ est infinie.}$$

1) A∞ vaut par définition. En ce qui concerne Y∞, supposons qu'il existe T, U et a tels que $T \vdash U$ et $U \vdash a$. Si T est infinie, $T \vdash a$. Si T est finie, tout élément de U appartient à T, donc U est finie, donc $a \in U$, donc $T \vdash a$.

2) Montrons maintenant que la loi de Lindenbaum-Asser faible n'est pas valide. On va montrer qu'il n'existe pas de théorie excessive. Soit T limitée, et soit a quelconque montrons que T n'est pas a-excessive. Supposons que $T \nvdash a$, donc T est finie et $a \notin T$, prenons $b \notin T$ et différent de a [l'existence d'un tel élément est garantie du fait de l'infinité du domaine], alors $T \cup \{b\} \nvdash a$, car $T \cup \{b\}$ est finie et ne contient pas a. T n'est donc pas a-excessive.

Nous avons le corollaire immédiat suivant de ce théorème.

COROLLAIRE *Il y a des logiques monotones qui ne sont pas des logiques de Lindenbaum-Asser faibles.*

La version de Goldblatt

Une théorie est dite *finiment limitée* si et seulement si toute sous-théorie finie de T est limitée.

Considérons maintenant la formulation du théorème de Lindenbaum donnée par R. Goldblatt [1984] (En fait la version de Goldblatt est moins générale, la version que nous donnons ici est une adaptation abstraite immédiate de la version qu'il donne.)

- loi de Lindenbaum-Goldblatt [LEG]
  Si une théorie est finiment limitée alors elle peut être étendue en une théorie maximale finiment limitée.

THEOREME DE LINDENBAUM-GOLDBLATT *La loi de Lindenbaum-Goldblatt vaut dans* toute *logique.*

Preuve. Soit T finiment limitée et soit $\mathrm{EXTFLI}[T]$, l'ensemble des extensions finiment limitées de T ($\mathrm{EXTFLI}[T]$ n'est pas vide puisqu'elle contient T). On montre d'abord que $\mathrm{EXTFLI}[T]$ est clos par union de chaîne:

soit U l'union d'une chaîne $\mathcal{C}$ de EXTFLI$[T]$, supposons que U ne soit pas finiment limitée, alors il existe une sous-théorie finie U_o de U illimitée, comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, il existe alors un élément V de cette chaîne qui contient U_o, et V n'est donc pas finiment limitée, ce qui est absurde car $V \in$ EXTFLI$[T]$.

La fin de la preuve est similaire à celle du théorème de Lindenbaum.

On pourrait croire que la loi de Lindenbaum se déduit de la loi de Lindenbaum-Goldblatt mais la loi de Lindenbaum-Goldblatt est équivalente à la loi de Lindenbaum à condition que l'on ait le théorème suivant:

Une théorie est finiment limitée si et seulemnent si elle est limitée.

Or ce théorème vaut notamment lorsque l'on a affaire à une logique monotone et limitativement compacte, puisque le "si" est exactement CL et que la monotonie entraîne le "seulement si". La seule chose que l'on puisse dire est que comme le "seulement si" n'implique pas nécessairement la monotonie, le théorème de Lindenbaum-Goldblatt peut éventuellement s'avérer intéressant dans le cas de logiques qui ne sont pas monotones mais qui vérifient ce théorème.

5. *Caractérisation des logiques maximales*

Nous allons voir dans cette section que les logiques dans lesquelles toutes les théories excessives sont maximales sont exactement les logiques "maximales" en un sens que nous allons préciser immédiatement.

Extension de logiques et logiques maximales

On dit qu'une logique $\mathcal{L}2 = \langle \mathbb{L}; \vdash_2 \rangle$ est une *extension* d'une logique $\mathcal{L}1 = \langle \mathbb{L}; \vdash_1 \rangle$ (ayant même domaine) si et seulement si $T \vdash_1 a \Rightarrow T \vdash_2 a$. On dit que c'est une *extension stricte* si et seulement s'il existe T et a tels que $T \nvdash_1 a$ et $T \vdash_2 a$.

On dit qu'une *logique* est *maximale* lorsqu'elle n'admet pas d'extension stricte non triviale (une *logique triviale* est une logique telle que $\vdash = \mathcal{P}(\mathbb{L})$ $X\mathbb{L}$).

Remarque. Le vocable "maximale" est employé ici par référence à la structure d'ordre partiel relative à la classe des logiques sur un ensemble $\mathbb{L}$.

Quelques faits simples

THEOREME *Dans une logique de Lindenbaum-Asser, toute théorie coïncide avec l'intersection de ses extensions excessives*:

$$T = \cap\, \mathrm{EXTEXC}[T].$$

Preuve. L'inclusion de gauche à droite est évidente puisqu'une théorie est inclue dans n'importe laquelle de ses extensions.

Pour le sens inverse, soit $a \notin T$, alors $T \nvdash a$, donc par la loi de Lindenbaum-Asser, il existe une extension T' de T, a-excessive, donc $a \notin T'$, donc $a \notin \cap\, \mathrm{EXTEXC}[T]$.

THEOREME (D.W. MILLER) *Etant donné une logique de Lindenbaum-Asser*:

$$\mathrm{MAX} = \mathrm{EXC} \Leftrightarrow T = \cap\, \mathrm{EXTMAX}[T].$$

Preuve. C'est un corollaire immédiat du théorème précédent.

THEOREME (PRESERVATION DE LA MAXIMALITE) *La maximalité est préservée par extension de logique*:

$$(T \vdash_1 a \Rightarrow T \vdash_2 a) \Rightarrow \mathrm{MAX}_1 \subseteq \mathrm{MAX}_2.$$

Preuve. Supposons que T ne soit pas 2/maximale, alors il existe $a \notin T$ et b tels que $T, a \nvdash_2 b$, donc $T, a \nvdash_1 b$, donc T n'est pas 1/maximale.

COROLLAIRE *Soit une extension* $\mathcal{L}2$ *d'une logique* $\mathcal{L}1$*, on a*:

$$\mathrm{EXTMAX}_1[T] \subseteq \mathrm{EXTMAX}_2[T].$$

Le théorème de maximalité

THEOREME *Soit* $\mathcal{L}$ *une logique de Lindenbaum-Asser telle que* $\mathrm{MAX} \neq \emptyset$:

$$\mathcal{L} \textit{ est maximale} \Leftrightarrow \mathrm{MAX} = \mathrm{EXC}.$$

Preuve. Soit une logique $\mathcal{L}1$ de Lindenbaum-Asser, supposons $\mathrm{EXC}_1 = \mathrm{MAX}_1$ et qu'il existe une extension stricte non triviale $\mathcal{L}2$ de $\mathcal{L}1$, c'est dire qu'il existe T et a tels que $T \nvdash_1 a$ et $T \vdash_2 a$.

Si $T \nvdash_1 a$, donc $a \notin T$,

donc $a \notin \cap\, \mathrm{EXTMAX}_1[T]$	[Théorème de D. W. Miller]
donc $a \notin \cap\, \mathrm{EXTMAX}_2[T]$	[Corollaire de la préservation de la maximalité]
donc $T \nvdash_2 a$	[car $\mathrm{MAX}_2 \subseteq \mathrm{CLO}_2$]

ce qui est absurde.

Inversement, soit $\mathcal{L}$ une logique de Lindenbaum-Asser ayant des théories maximales, supposons que $\mathrm{MAX} \neq \mathrm{EXC}$ (i.e. $\emptyset \subset \mathrm{MAX} \subset \mathrm{EXC}$).

Par le théorème d'inversion sémantique la logique induite par MAX est une extension de la logique induite par EXC: $T \vdash_{\mathrm{EXC}} a \Rightarrow T \vdash_{\mathrm{MAX}} a$. Supposons que ce ne soit pas une extension stricte, alors on a: $T \vdash_{\mathrm{EXC}} a \Leftrightarrow T \vdash_{\mathrm{MAX}} a$; donc MAX est également une sémantique complète pour $\mathcal{L}$, ce qui est impossible vu le théorème de minimalité, étant donné qu'il y a dans $\mathcal{L}$ des théories excessives non maximales. Par conséquent la logique induite par MAX est une extension stricte de $\mathcal{L}$, non triviale de surcroît, du fait que MAX n'est pas vide.

6. *Perspectives: la connexion entre l'abstrait et le concret*

Dans cette étude nous sommes restés au niveau abstrait, mais de nombreuses connexions très intéressantes existent entre le niveau abstrait et les logiques particulières.

Une question importante est celle du rapport entre les différents opérateurs logiques et l'équation $\mathrm{EXC} = \mathrm{MAX}$. Nous avons prouvé qu'en présence d'une négation classique, cette équation est vérifiée. D. W. Miller et nous-mêmes avons prouvé qu'il en est de même dans le cas d'une implication classique. Dans un prochain article, "Négation et Excessivité", nous exposerons plusieurs autres de ces résultats, notamment le fait que si l'on a une négation de Johansson n'obéissant pas à la loi de Curry alors l'équation n'est pas valable.

Dans un autre article, "Séquents et bivaluations" (cf Béziau [2000]), nous présenterons une application du théorème de Lindenbaum-Asser au calcul des séquents. Expliquons en deux mots de quoi il s'agit. En vertu du théorème de Lindenbaum-Asser et de quelques résultats faciles on sait que:

Pour qu'une sémantique soit adéquate pour une logique normale déductivement compacte $\mathcal{L}$ il suffit qu'elle contienne la classe des théories excessives et soit contenue dans la classe des théories closes:

$$\mathrm{EXC} \subseteq \mathrm{BIV} \subseteq \mathrm{CLO} \Rightarrow (T \vdash_{\mathcal{L}} a \Leftrightarrow T \vdash_{\mathrm{BIV}} a).$$

Nous avons prouvé que les théories excessives respectent les règles de tous les systèmes de séquents structurellement standards. Il en résulte que si l'on combine ce résultat avec le théorème de Lindenbaum-Asser tel qu'exposé dans la formule ci-dessus on peut prouver immédiatement l'adéquation d'un grand nombre de sémantiques bivalentes relativement à des logiques induites par des règles du calcul des séquents. Nous avons déjà appliqué avec succés cette méthode à une large famille de logiques paraconsistantes, paracomplètes et non-alèthiques construites suivant les méthodes de da Costa (cf Béziau [1990]).

Institut de Logique
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
2000 Neuchâtel, Suisse
E-mail: `beziau@hotmail.com`

BIBLIOGRAPHIE

Aczel, P. [1968], 'Saturated intuitionistic theories', in *Logic Colloquium 1966*, édité par H.A. Schmidt, K. Schütte et H.J. Thiele, North-Holland, Amsterdam, pp. 1–11.

Asser, G. [1959], *Einführung in die mathematische Logik, Teil I: Aussagenkalkü1*, B.G. Teubner, Leipzig.

Béziau, J.-Y. [1990], 'Logiques construites suivant les méthodes de da Costa I', *Logique et Analyse*, 131/132 (1990), 259–272.

Béziau, J.-Y. [2000], 'Séquents et bivaluations', à paraître dans *Logique et Analyse*.

da Costa, N.C.A. et J.-Y. Béziau [1994], 'La théorie de la valuation en question' in *Proceedings of the Ninth Latin-American Symposium on Mathematical Logic*, édité par M. Abad, Bahía-Blanca.

Dawson Jr, J.W. [1993], 'The compactness of first-order logic: from Gödel to Lindström', *History and Philosophy of Logic*, 14, 15–37.

Dzik, W. [1981], 'The existence of Lindenbaum's extensions is equivalent to the axiom of choice', *Reports on Mathematical Logic*, 13, 29–31.

Gödel, K. [1932], 'Eine Eigenschaft der Realisierungen des Aussagenkalküls', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 3, 20–21.

Goldblatt, R. [1984], 'An abstract setting for Henkin Proofs', *Topoi*, 3, 37–41.

Henkin, L. [1949], 'A proof of completeness for the first order functional calculus', *Journal of Symbolic Logic*, 14, 159–166.

Loparic, A. [1977], 'Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels', *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. 284A, 835–838.

Loparic, A. et N.C.A. da Costa [1984], 'Paraconsistency, paracompleteness and valuations', *Logique et Analyse*, 106, 119–131.

Łoś, J. [1951], 'An algebraic proof of completeness for the two-valued propositional calculus', *Académie Polonaise des Sciences*, 12, 236–240.

Pogorzelski, W. et P. Wojtylak [1982], *Elements of the theory of completeness in propositional logic*, Université Silésienne de Katowice, Katowice.

Scott, D.S. [1974], 'Completeness and axiomatizability' in many-valued logic in *Proceedings of the Tarski Symposium*, édité par L. Henkin, American Mathematical Society, Providence, pp. 411–435.

Surma, S.J. [1974], 'The concept of the Lindenbaum algebra: its genesis' in *Studies in the history of mathematical logic*, édité par S.J. Surma, Ossolineum, Wrocław, pp. 239–254.

Surma, S.J. [1982], 'On the origin and subsequent applications of the concept of the Lindenbaum algebra', in *Logic, methodology and philosophy of science VI*, édité par L.J. Cohen, J. Łos, H. Pfeiffer, K-P. Podewski, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovie/North-Holland, Amsterdam, pp. 719–734.

Tarski, A. [1928], 'Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques', *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, 7, 270–272.

Tarski, A. [1930], 'Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik', *Comptes Rendus des Séances de la Société des Lettres et des Sciences de Varsovie, Classe III, Sciences Mathématiques et Physiques*, 23, 22–29.

Wójcicki, R. [1984], *Lectures on propositional calculi*, Ossolineum, Wrocław.

Wójcicki, R. [1988], *Theory of logical calculi*, Kluwer, Dordrecht.