FONDEMENTS POUR UNE MEREOLOGIE ENSEMBLISTE

(pour la revue «Logique et Analyse»)

Jean-Marc LAFORGE

Il s'agit de définir de façon aussi exacte que possible le statut de la relation:

(1) $<xEy \equiv$ x est fragment de y (au sens physique intuitif) ainsi que de la relation

(2) $<x \in y \equiv$ x est élément de l'ensemble y (au sens ensembliste ordinaire)$>$

en montrant comment ces deux relations peuvent être définies l'une à partir de l'autre et réciproquement ,et cela en associant profondément dans un certain contexte axiomatique la théorie ordinaire des ensembles et la méréologie, et en montrant comment on peut reconstruire une théorie des ensembles à signification concrète physique (une méréologie ensembliste nommément) à l'intérieur même de la théorie des ensembles. Cette dernière pourra ainsi, éventuellement, permettre de développer des applications plus immédiatement en rapport avec la physique, dans le cadre par exemple d'une reformulation de certaines structures topologiques qui seraient reconstituées sur les blocs physiques d'espace matériel que sont les classes méréologiques.

Brève présentation de l'axiomatisation définitive d'une méréologie ensembliste.

Deux concepts primitifs «extra-logiques», i.e. «étrangers à la logique des propositions + logique des prédicats).

+ Un symbole de constante de prédicat du premier ordre: La proposition "Gb(x"), i.e. sera interprété comme «x est une globalité concrète» [Tel caillou, telle chaise, tel corps humain etc... satisfont à Gb($\hat{x}$); une classe Russellienne quelconque ne satisfait pas généralement parlant à Gb(x), un prédicat non plus. Laissons pour le moment indécidée la question de savoir

si les êtres «sur-naturels» (anges, démons), à supposer qu'ils existent, satisfont à Gb(x). Tout porte à croire qu'ils y satisferaient) Admettons provisoirement $<Gb(x) \equiv$ (x est un solide géométrique de l'espace physique matériel à 3 dimensions)$>$.

+ Un symbole d'opérateur liant variable

«$C_\alpha[\ldots\alpha\ldots]$ = classe des α tels que «..α..»

$<C_\alpha[\alpha = a \vee a = b \vee a = c \vee \ldots] = \{a, b, c, \ldots\}>$

Nous retrouvons là le symbole de «{...} — assemblage» formateur de classe.

(I) *Définition des nouveaux symboles.*

Dfc. 1 $<(Gb(\{a, b, c, \ldots\}) \Rightarrow$
$[xE\{a, b, c, \ldots\} \equiv$
$(x = a \vee x = b \vee x = c \vee \ldots)]) \forall a \forall b \forall c \ldots>$

Ceci est la définition de la relation binaire «xEy», i.e. «x est fragment de y».

Ceci est une définition conditionnelle subordonnée à la clause conditionnelle. Gb({a, b, c, ...})» Nous admettons que l'on peut poser des définitions conditionnelles comme définitions correctes:) [Dfc se lit définition conditionnelle].

Dfc. 2 (i) $<(Gb(C_\alpha[\psi\alpha]) \Rightarrow$
$(T_\alpha[\psi\alpha] = C_\alpha[\psi\alpha]) \forall \psi>$
(ii) $<(Gb(\{a, b, c, \ldots\}) \Rightarrow$
$(\{a, b, c, \ldots\} = [a, b, c, \ldots]$
$)) \forall a \forall b \forall c \ldots>$
($T_\alpha[\psi\alpha]$ = classe méréologique des a tels que «$\psi\alpha$»).
$(T_\alpha[\alpha = a \vee a = b \vee a = c \vee \ldots]$
$= [a, b, c, \ldots])$

Dfc. 3 $<((\text{Les objets a, b, c, ... recouvrent exactement et exhaustivement l'objet 0}) \equiv (Gb(a) \wedge Gb(b) \wedge Gb(c) \wedge \ldots \wedge Gb(o) \wedge T_a[\alpha = a \vee \alpha = b \vee \alpha = c \vee \ldots] = 0)) \forall a \forall b \forall c \ldots \forall o>$

(II) *Axiomes et quelques corollaires.*

Ax. 1 $<((Gb(a) \wedge Gb(b) \wedge \ldots) \Rightarrow Gb(T_\alpha[\alpha = a \vee \alpha = b \vee \ldots])) \forall a.. \forall b \ldots>$

Ax. 2 $<(Gb(T_\alpha[\psi\alpha]) \equiv Z(\psi)) \forall \psi>$.

Dfc. 4 $<(Z(\psi) \equiv \exists z[z \in E\, C_\alpha[\psi\alpha] \wedge Gb(z)]) \forall \psi>$.

Dfc. 5 $<(\in A = (A \cup \sqcup A \cup \sqcup\sqcup A \cup \ldots \cup \sqcup \ldots \sqcup$
n occurrences
de «$\sqcup$»

(avec $n \rightarrow \infty$)) $\forall A>$

Def. 6 $<(\sqcup A = C_\beta[\exists z [\beta \in z \wedge z \in A]]) \forall A>$

Dfc. 7 $<([\ldots] \Rightarrow (x \in C_\alpha[\psi\alpha] \equiv \psi x)) \forall \psi \forall x>$.

(Cette définition de «$\in$» pour ne pas donner lieu à l'antinomie russellienne doit être subordonnée à certaines clauses conditionnelles).

Ax. 8 $<((T_\alpha[\psi\alpha] = C_{\alpha'}[\alpha' E\, T_\alpha[\psi\alpha]] = T_{\alpha'}[\alpha, E T_\alpha[\psi\alpha]]) \Leftarrow (Gb(T_\alpha[\psi\alpha]))) \forall \psi>$. (chaîne de 2 égalités)

Def. c'3 $<((Gb(a) \wedge Gb(b) \wedge \ldots \wedge Gb(o)) \Rightarrow$ (Les objets a, b, recouvrent exactement et exhausivement $o = (T_\alpha[\alpha = a \vee \alpha = b \vee \alpha = c \vee \ldots] = o)) \forall a \forall b \ldots \forall o>$.

Ax. 9 $<(Gb(C_\alpha[\psi\alpha]) \equiv \exists z[Gb(z) \wedge \forall K[\psi K \equiv KEZ]) \forall \psi>$

Def. 10 $<(KC_\alpha[\psi\alpha] = T_\alpha[\psi\alpha])\ \forall\psi>$

Ax. 11 (1) $<((x\ E\ [x, y, z, \ldots]) \Leftarrow (Gb(x) \wedge Gb([x, y, z \ldots])))$
$\forall x\ \forall y\ \forall z \ldots>$

(2) $<\{\{x\ E\ y \equiv \forall z\ [Gb(z) \Rightarrow [z\ E\ x \Rightarrow z\ E\ y]]) \Leftarrow$
$(Gb(x) \wedge Gb(y)))\ \forall x\ \forall y>$

(3) $<((x^1\ E\ y \wedge \ldots \wedge x^n\ E\ y) \equiv [x^1, \ldots, x^n]\ E\ y) \Leftarrow$
$(Gb(x^1) \wedge \ldots \wedge Gb(x^n) \wedge Gb(y) \wedge$ n est un entier fini
$\forall x^1 \ldots \forall x^n\ \forall y\ \forall n>$

(4) $<$(Aucun β n'est tel que «$\beta\ E\ \alpha$» si ce n'est en vertu des choses 1, 2, 3 ci-dessus) $\forall\alpha>$

Ax. 12 $<(Gb(\{a, b, \ldots) \Rightarrow (Gb(a) \wedge Gb(b) \wedge \ldots))\ \forall a\ \forall b \ldots>$

Ax. 13 $<(Gb(x) \Rightarrow [x = C_\alpha[\alpha\ E\ x]])\ \forall x>$

Corol. 13'. $<(a\ E\ b \equiv (a\ E\ b \wedge Gb(b))\ \forall a\ \forall b>$

Corol. 14. $<(x \in C_\alpha\ [\alpha = a \vee \alpha = b \vee \ldots] \equiv (x = a \vee x =$
$b \vee \ldots) \equiv x\ E\ \{a, b, c, \ldots\}) \vee a \forall b>$
(c'est une chaîne de 2 équivalences).

Ax. 15 (de la méréologie comme théorie autonome)
$<((X = T_\alpha[\psi\alpha] \equiv (Gb(X)$
$\wedge Z(\psi) \wedge \forall z[(\psi z \wedge Gb(z)) \Rightarrow z\ E\ X] \wedge \forall v[v\ E\ x$
$\Rightarrow \exists w\ \exists w'[w\ E\ v \wedge w\ E\ w' \wedge \psi w']) \Leftarrow (Gb(x)$
$\wedge Z(f) \wedge \forall\alpha\ [f\alpha \Rightarrow Gb(\alpha)]))\ \forall X\ \forall\psi>$

Ax. 16 $<(x\ E\ y \equiv (x\ E\ y \wedge Gb(x) \wedge Gb(y))\ \forall x\ \forall y>$

Ax. 17 $<(x\ E\ y \equiv (x \in y \wedge Gb(x) \wedge Gb(y)))\ \forall x\ \forall y>$

Ax. 18 (i) $<(Gb(X) \Rightarrow$
$\forall y[y\ E\ x \equiv y \in x]\ \forall X>$
(ii) $<((Gb(x) \wedge Gb(Y) \Rightarrow$
$(X \in Y \equiv X\ E\ Y))\ \forall X\ \forall Y>$

Ax. 19 (i) $<(Gb(x) \Rightarrow ($
$x \in \{a, b, c, \ldots\} \equiv$
$(\forall z[Gb(z) \Rightarrow$
$(z\, E\, x \equiv z \in a]]\ v\ \forall\ z[Gb(z) \Rightarrow$
$(z\, E\, x \equiv z \in b]]\ v\ \forall\ z[Gb(z) \Rightarrow$
$(z\, E\, x \equiv z \in c]\ v \ldots)))\ \forall a\ \forall b\ \forall c \ldots>$
(ii) $<((x \in \{a, b, c, \ldots\}$
$\Rightarrow$
$x\, E\, [a, b, c, \ldots]$
$) \Leftarrow Gb(x) \wedge Gb$
$([a, b, c, \ldots]))\ \forall x\ \forall a\ \forall b\ \forall c \ldots>$
(iii) $<((Gb(x) \wedge Gb(y)) \Rightarrow (x \in y \equiv x\, E\, y)))\ \forall x\ \forall y$
(iiii) $<((\{a, b, c, \ldots\} \in X \Rightarrow$
$(a \in X \wedge b \in X \wedge C \in X \wedge \ldots)$
$) \Leftarrow (Gb(a) \wedge Gb(b) \wedge Gb(c)$
$\wedge \ldots \wedge Gb(X)))\ \forall a\ \forall b\ \forall c \ldots\ \forall X>$

Corol. 20 $<(Gb(X) \Rightarrow$
$(V\alpha[\alpha\, E\, X \equiv (\alpha = b\, V\, \alpha = c\, V \ldots)]$
$\Rightarrow (X = \{a, b, c, \ldots\})))\ \forall\ X$
$\forall a\ \forall b\ \forall c \ldots>$

Ax. 21 $<(Gb(x) \equiv \exists \alpha \in \beta \ldots$
$[\forall z[z\, E\, x \equiv [z = \alpha\, v\, z = \beta\, v \ldots) \wedge (Gb(\alpha) \wedge Gb(\beta) \wedge \ldots$
$) \wedge x = \{\alpha, \beta, \ldots\}]])\ \forall x>$

Ax. 22 (sans doute corollaire i.e. thèse dérivée)
$<\forall \alpha\ \forall x^1 \ldots \forall x^n\ \forall y[(Gb(\alpha)$
$\wedge Gb(x^1) \wedge \ldots \wedge Gb(x^n) \wedge Gb(y)$
$) \Rightarrow (x^1\, E\, y \wedge \ldots \wedge$
$x^n\, E\, y \wedge \forall v[v\, E\, \alpha \equiv (v = x^1\, V\, v = x_2\, V \ldots Vv =$
$x^n\, V \ldots)]$
$\equiv ((\alpha = [x^1, \ldots, x^n] = \{x^1, \ldots, x^n\} \wedge \{x^1, \ldots, x^n\}\, E\, y))]>$
a la préséance sur $\equiv$ (puis chaîne de 2 égalités).

Corol. 23 $<\forall X(Gb(X) \Rightarrow \exists \alpha \exists \beta \ldots [X = T_z[z = \alpha\, V\, z =$
$\beta\, V \ldots])>$

(III) *Thèses primitives supplémentaires postulant un «atomless'» univers.*

Ax. 24 $<\forall\varphi[Z(\psi) \Rightarrow \exists c[c \in c_\alpha[\psi\alpha] \wedge c \neq c_\alpha[\psi\alpha]]]>$

Ax. 25 $<\forall A[\exists b \exists c \ldots [A = \{b, c, \ldots\}]>$

(Corol. $<\forall A[\exists\psi[A = C_\alpha[\psi\alpha]]>$).

Ax. 26 $<(Gb(x) \Rightarrow \exists Z[X = [\underset{\infty}{\Diamond} E\,P']Z])\,\forall x>$

Def. rec. 27 1) $<([\underset{1}{\Diamond} E\,P']\,Z = E\,P'\,Z)\,\forall z>$

2) $<([\underset{n}{\Diamond} E\,P']\,Z = (\bigcup_{i=1}^{i=(n-1)} [\underset{i}{\Diamond} E\,P']\,Z$

$\cup\ E\,P'[\bigcup_{i=1}^{i=(n-1)} [\underset{i}{\Diamond} E\,P']$

$Z]])\,\forall\,Z$

$[\bigcup_{i=1}^{i=n} [\wedge_i] = (A_1 \cup \ldots \cup A_n)]$

convention $\cup$ c'est un indice, f(i) une fonction d'indice.

Def. 28 $<(P'\,A = C_\alpha[\alpha \in A \text{ Kard } \alpha \text{ fini}])\,\forall A>$

Def. 29 $<(a \in B \equiv \forall x\,[x \in a \Rightarrow x \in B])\,\forall a\ \forall B>$

Ax. 30 $<(A = B \equiv \forall x\,[x \in \wedge \equiv x \in B] \equiv \forall x[A \in x \equiv B \in x])\ \forall A\ \forall B>$

Def. 31 $<\{(a \sqcup b = a \cup b \Leftarrow (Gb(a) \wedge Gb(b))\}\ \forall a\ \forall b>$

Def. 32 $<((a \sqcap b = a \wedge b \Leftarrow (Gb(a) \wedge Gb(b)))\ \forall a\ \forall b>$

$\left\{ \begin{array}{l} <a \underset{m}{\sqcup} b = a \sqcup b> \\ <a \underset{m}{\sqcap} b = a \wedge b> \end{array} \right.$

Def. 33 $<\{(\overset{|-|}{a} = \overline{a})$

$\Leftarrow (Gb(a) \wedge Gb(\overline{a}))\}\forall a>$

Ax. 34 (de la méréologie comme théorie autonome)

(i) $<(T_\alpha[\varphi\alpha] \sqcap T\alpha[\psi'\alpha]$

$= T_\alpha[\varphi\alpha \wedge \psi'\alpha]\ \forall\psi\ \forall\psi' >$

(ii) $< (T_\alpha[\varphi\alpha] \sqcup T_\alpha[\psi'\alpha]$

$= T_\alpha[\varphi\alpha\ V\psi'\alpha])\ \forall\psi'\ \forall\psi' >$

(iii) $< ((\overset{|-|}{A} = T_\alpha[\neg\ \exists\ \beta[$

$\beta\ E\ \alpha \wedge \beta\ E\ A]])\ \Leftarrow (Gb(A))\ \forall A >$

$\bar{a}$ complement ensembliste,

$\overset{|-|}{a}$ complement méréologique,

($\in$: appartenance au sens ensembliste ordinaire)

(E): être fragment deau sens physique intuitif).

Voilà donc l'axiomatisation définitive proposée de la méréologie ensembliste.

Elle est telle quelle plus ou moins redontante. Elle développe en tout cas des structures logico-mathématiques d'une très grande richesse et nous l'espérons d'une non moins grande fécondité.

La méréologie non associée à la théorie des ensembles nous apparaît être une théorie assez pauvre.

La théorie des ensembles non associée à la méréologie nous paraît ne faire, à certains égards du point de vue concret en physique, que brasser des nuages.

Il fallait donc associer intimement et profondément ces deux théories.

Nous pensons l'avoir fait dans l'axiomatisation très riche et assez touffue proposée.

Evidemment, nous supposons admis

1) $C_\alpha[\varphi\alpha\ v\varphi'\alpha] = C_\alpha[\varphi\alpha] \cup C_\alpha[\varphi'\alpha]$

2) $C_\alpha[\varphi\alpha \wedge \varphi'\alpha] = C_\alpha[\varphi\alpha] \cap C_\alpha[\varphi'\alpha]$

3) $C_\alpha[\ \rceil\varphi\alpha] = \overline{C_\alpha[\varphi\alpha]}$

4) $C_\alpha[\ \rceil\varphi\alpha] = C_\alpha[\varphi\alpha]$

5) $\overline{(a \wedge b)} = (\bar{a} v \bar{b})$

6) $\overline{(a v b)} = (\bar{a} \wedge \bar{b})$ etc...

Notre axiomatique mérite quelques remarques:

1) elle postule d'une part la théorie des ensembles au sens ordinaire;

2) elle reconstruit les catégories méréologiques à partir de cette dernière par des définitions;

3) enfin, elle introduit certains axiomes où figurent outre les symboles de constante de la théorie des ensembles, les symboles de constante de la méréologie déjà définis — un symbole de constante nouveau $Gb(x) \equiv x$ est un objet concret;

4) Pour finir, elle ajoute quelques formules primitives de la méréologie, axiomes de la méréologie prise alors comme théorie autonome. On aurait pu supprimer de notre axiomatisation ces derniers axiomes qui devraient pouvoir être retrouvés à partir de 1) + 2), 3) ci-dessus. Ces axiomes de la méréologie autonome sont introduits comme axiomes normatifs stipulant intuitivement les notions méréologiques introduites, mais non nécessaires à vrai dire à notre axiomatisation.

Inutile de commenter les parties 1), 2), ci-dessus mentionnées de notre axiomatique.

3) constitue une physique de l'objet quelconque puisque dans les axiomes de 3) set rouvent associés le symbole de constante spécifique de prédicat $Gb(\hat{x})$. D'ailleurs, 3) est sans doute en grande partie déductible de 1) et 2), — compte tenu des bases axiomatiques fondamentales que nous nous donnons:

1] Une classe distributive d'une certaine espèce peut satisfaire à $Gb(x)$

2] $\langle Gb(x) \Rightarrow [x = C_\alpha[\alpha\, E\, x]] \rangle$

[Ainsi la classe distributive des cellules du corps humain ne satisfait pas à $Gb(\hat{x})$ (car si cela était, il en serait de même de la classe des molécules du corps humain. Ces 2 classes satisfaisant à $Gb(\hat{x})$ seraient alors identiques chacune au corps humain. Elles seraient identiques entre elles. Ce qui mènerait à l'impossibilité <x est une cellule = x est une molécule>. Par contre, la classe de tous les fragments du corps humain satisfait à $Gb(x)$ et est identique au corps humain lui-même. Elle est une classe méréologique].

(X est une classe $\equiv$ X est une classe distributive $\equiv$ $\exists b\ \exists c$ ... $[X = \{b, c, \ldots\}\rceil$).

Enfin, compte tenu de la définition (cf. page 15),

$$<T\,A = [\underset{\infty}{\Diamond} E\,P']\,A>$$

nous pouvons considérer les α tels que $Gb(\alpha)$ comme des classes munies de la structure ensembliste interne — i.e. des x tels que:

$$+\ \exists\alpha\ \exists\beta \ldots [x = \{\alpha, \beta, \ldots\}]$$

$$+\qquad x = \tilde{\rceil}\, x$$

$$+\qquad \exists y[x = \tilde{\rceil}\, y \wedge$$

$$+\ \exists\alpha\ \exists\beta \ldots [y = \{\alpha, \beta, \ldots\}$$
$$]>$$

Ainsi, en associant la méréologie à la théorie des ensembles et au prédicat Gb(x) — on a construit une physique de l'objet quelconque sur la base d'une théorie des ensembles absolument «atomless» où $<\forall z[\exists\alpha[\alpha\in z \wedge \alpha\neq z]]>$, c.-à-d. absolument sans objets du type «o» (cf. Théorie des types de B. Russel), où toute chose est un ensemble et où les globalités concrètes sont des ensembles d'une sstructure particulière. Ceci devrait permettre un renouvellement profond de la topologie et la construction d'une topologie redéfinissant les structures topologiques non pas sur des classes quelconques, mais sur ces classes particulières qui peuvent être identifiées aux blocs de l'espace physique matériel que sont les classes méréologiques.

Jean-Marc Laforge,
18, rue de Bellevue,
92100 Boulogne S/Seine (France).
Juin 1973

1) $<[\underset{o}{\triangle} A]\, B = B>$

2) $<[\underset{n}{\triangle} A]\, B = A[\underset{n-1}{\triangle} A]\, B>$

3) $< \bigcup_{i=o}^{i=n} [A_i] = (A_o \cup A_i \cup \ldots \cup A_n>$

B) $c(Gb(X) \equiv \exists A[X = \top A \wedge$
$\forall z[z \in X \Rightarrow Gb(z)]])\, \forall X>$

4) $<[\underset{n}{\triangle}(\ldots)] \wedge = \underbrace{(\ldots)\,(\ldots)\,\ldots}_{\text{n occurences de «(...)»}} \wedge>$